

И. В. Калачева

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ

Могилев
МГУ имени А. А. Кулешова
2017

Электронный аналог печатного издания:

И. В. Калачева

Статистические методы в психологии

Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2017. – 396 с. : ил.

ISBN 978-985-568-286-9

Издание представляет собой учебно-методическое пособие для изучения дисциплины «Статистические методы в психологии», разработанное в соответствии с требованиями образовательного стандарта первой ступени высшего образования Республики Беларусь по специальности 1 - 23 01 04 «Психология». Его основной целью является формирование компетентности студентов в области математической статистики и навыков применения ее методов в процессе проведения психологических исследований.

Адресовано студентам психологических специальностей различных форм получения образования, а также преподавателям психологии.

УДК 159.9.072:159.922(075.8)
ББК 88в631я73

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по гуманитарному образованию в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования, обучающихся
по специальности 1-23 01 04 «Психология»*

Калачева. И. В. Статистические методы в психологии [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / И. В. Калачева. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2017. – 1 электрон. опт. диск (CD-R); 12 см. – Сист. требования: Pentium II 300, 64 Mb RAM, свободное место на диске 16 Mb, Windows 98 и выше, Adobe Acrobat Reader, CD-Rom, мышь. – Загл. с экрана. – 3 экз.

212022, г. Могилев
ул. Космонавтов, 1
тел.: 8-0222-28-31-51
e-mail: alexpzn@mail.ru
<http://www.msu.by>

ISBN 978-985-568-360-6
(электронное издание)

© Калачева И. В., 2017
© МГУ имени А. А. Кулешова, 2017
© МГУ имени А. А. Кулешова,
электронный аналог, 2017

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время междисциплинарный подход все активнее используется в практике подготовки специалистов в различных сферах деятельности, в том числе психологов. Именно на стыке математической и психологической науки появилась дисциплина «Статистические методы в психологии». Благодаря проникновению математического аппарата в психологию последняя получила возможность количественно описывать и сравнивать изучаемые психологические явления, в обобщенном виде представлять их закономерности, повышать доказательность выводов эмпирических исследований, сопровождая их результатами статистического анализа. В связи с этим изучение статистических методов является важным элементом общепрофессиональной подготовки психологов, компонентом культуры проведения психологического исследования.

В типовой учебной программе дисциплины «Статистические методы в психологии» представлены цель и задачи изучения курса, сформулированы требования к знаниям и умениям студентов [1].

Целью изучения дисциплины является формирование у студентов представлений о возможностях применения математики в изучении психологических явлений, овладение ими практическими навыками математической обработки результатов психологического исследования.

Задачи дисциплины:

- усвоение знаний о сущности и технологии применения математических методов при проведении современного научного психологического исследования;
- овладение навыками выбора адекватного метода или критерия для доказательства научных закономерностей в психологии;
- анализ условий и ограничений в применении статистических критериев;
- формирование культуры проведения научного психологического исследования, навыков построения доказательства научных гипотез с применением математических методов в психологии.

В результате изучения данной дисциплины *студент должен знать:*

- основные этапы и назначение математико-статистического анализа результатов исследования;
- основные понятия и математико-статистические процедуры первичной статистической обработки результатов психологического исследования;
- назначение и особенности основных методов вторичной статистической обработки результатов психологического исследования.

В результате изучения данной дисциплины *студент должен уметь:*

- выбирать и использовать табличное и графическое представления результатов психологического исследования, которые обеспечивают удобство и наглядность анализа существующих закономерностей;
- выбирать и применять методы математико-статистической обработки, обеспечивающие получение обоснованных выводов о психологических закономерностях.

В результате изучения данной дисциплины *студент должен владеть:*

- навыками формулирования статистических гипотез и алгоритмом выбора метода их проверки при решении различных исследовательских задач;
- техниками обработки эмпирических данных с помощью универсальных статистических пакетов и навыками интерпретации полученных результатов;

– правилами презентации результатов статистической обработки данных в устных и письменных отчетах.

Пособие содержит примерный тематический план и программу учебного курса, конспект лекций, планы практических занятий, вопросы для подготовки к зачету и экзамену, тестовые задания для программированного контроля знаний, список использованной литературы.

Конспект лекций распределен на темы в соответствии с учебной программой дисциплины «Статистические методы в психологии» и содержит план, перечень понятий по изучаемой теме, краткое содержание темы, вопросы для самопроверки. Теоретические положения каждой темы сопровождаются пояснениями, примерами решения задач.

Планы практических занятий построены таким образом, чтобы дать возможность студентам более полно осмыслить теоретические положения лекционного курса, освоить методы математико-статистической обработки результатов эмпирического исследования, овладеть основами психологического анализа данных. Система заданий содержит ряд задач и упражнений, требующих статистической обработки и анализа данных, которые могут быть использованы как для проведения практических занятий под руководством преподавателя, так и для организации самостоятельной работы студентов. При этом каждый преподаватель может самостоятельно подбирать задачи и выстраивать содержание занятий в зависимости уровня подготовленности обучающихся.

Практические задания, представленные в каждой теме, могут быть использованы для проведения лабораторных занятий по предмету. При организации лабораторных работ основное внимание следует уделить освоению студентами техник обработки эмпирических данных с помощью универсальных статистических пакетов и овладению навыками интерпретации полученных результатов. В качестве статистических данных, предлагаемых для обработки, на этапе формирования у студентов навыка применения программных пакетов могут быть использованы данные задач, приведенных в практикуме. В дальнейшем, особенно в случае больших выборок и (или) при применении методов многомерного анализа, целесообразно использовать набор файлов данных, полученных в результате курсовых и дипломных исследований, а также данные из различных пособий, в том числе приведенных в списке литературы.

Тестовые задания для программированного контроля знаний позволяют преподавателю быстро и эффективно организовать промежуточный и (или) итоговый контроль знаний по предмету.

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с требованиями образовательного стандарта первой ступени высшего образования Республики Беларусь по специальности 1- 23 01 04 «Психология» и призвано способствовать повышению эффективности изучения дисциплины «Статистические методы в психологии», усилению роли самостоятельной работы студентов по овладению основными методами обработки результатов психологического исследования.

Пособие адресуется студентам психологических специальностей различных форм получения образования, а также преподавателям психологии.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН КУРСА «СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ»

	Название темы	Количество часов		
		лекции	практические	лабораторные
Раздел I Описательная статистика				
1.	Способы получения статистических данных в психологии	2	2	2
2.	Табулирование и наглядное представление данных	4	4	2
3.	Вычисление основных статистических показателей	6	6	2
Раздел II Теория статистического вывода				
4.	Нормальное распределение	4	4	2
5.	Теория оценок	2	2	1
6.	Проверка статистических гипотез	2	2	1
7.	Корреляционный анализ	4	6	2
8.	Регрессионный анализ	2	2	2
Всего за 2 семестр		26	28	14
Форма контроля – зачет				
9.	Сопоставление совокупностей по уровню и однородности признака	4	6	2
10.	Оценка достоверности сдвига в значениях исследуемого признака	4	6	2
11.	Выявление различий в распределении признака	2	6	2
12.	Многофункциональные критерии	2	4	2
13.	Дисперсионный анализ	4	8	2
Раздел III Многомерный статистический анализ и математические модели				
14.	Многомерный статистический анализ	2	4	4
15.	Математические модели в психологии	2	2	2
Всего за 3 семестр		20	36	16
Форма контроля – экзамен				
Всего:		46	64	30

ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА

РАЗДЕЛ I ОПИСАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА

Тема 1 Способы получения статистических данных в психологии

Математическая статистика как наука. Понятие о методах математической статистики. Первичные и вторичные методы статистической обработки данных. Достоинства и недостатки математико-статистического анализа экспериментальных данных. Основные этапы статистической обработки результатов психологических исследований. Признаки и переменные в психологии. Выраженность признака. Понятия «показатель» и «уровень» с количественными определениями «низкий», «средний» и «высокий». Количественные и качественные, непрерывные и дискретные, зависимые, независимые и контролируемые переменные. Измерение. Понятие о методе психологических измерений. Особенности процесса измерения в психологии. Виды измерения: нормативное, критериальное и ипсативное; прямые и косвенные, непосредственные и опосредованные, одномерные и многомерные, малочисленные и многочисленные, зависимые и независимые измерения. Специальные математические символы, операции, условные обозначения. Психологическое шкалирование. Формализация процесса измерения. Шкалы измерения переменных (С. Стивенс): номинативная (номинальная), или шкала наименований; порядковая (ординальная) шкала; интервальная, или шкала равных интервалов; шкала равных отношений. Переход от количественных оценок к качественным. Ранг и ранжирование.

Тема 2 Табулирование и наглядное представление данных

Понятие о генеральной совокупности и выборке. Определение оптимального объёма выборки испытуемых. Выборка стандартизации. Правила формирования выборки стандартизации: репрезентативность, случайный характер, качественная однородность, достаточный объём. Способы формирования выборки испытуемых. Построение вариационного ряда (вариационной таблицы). Абсолютные, относительные и накопленные частоты. Статистическое распределение и его виды: распределение частот и относительных частот, интервальное распределение (распределение сгруппированных частот). Табулирование данных. Применение меток для подсчёта абсолютных и относительных частот. Графическое (наглядное) представление эмпирических данных (полигон распределения, гистограмма, точечная диаграмма). Построение полигонов частот и относительных частот, гистограмм, точечных диаграмм; их интерпретация и сравнение. Описание статистических данных с помощью квантилей (квартилей, децилей, процентилей). Внутриквартильный размах. Процентильная группировка данных.

Тема 3 Вычисление основных статистических показателей

Меры центральной тенденции (мода, медиана, среднее). Интерпретация и свойства мер центральной тенденции. Расчёт мер центральной тенденции по выборке, по вариационному ряду, по частотному распределению. Выбор меры центральной тенденции. Меры изменчивости (исключающий и включающий размах, среднее отклонение, дисперсия, стандартное отклонение). Интерпретация мер изменчивости. Определение эффективности оценки центральной тенденции с помощью среднего. Коэффициент вариации. Расчёт мер изменчивости по частотному распределению. Вычисление показателей асимметрии и эксцесса распределения. Виды асимметрии: положительная (левосторонняя), отрицательная (правосторонняя). Виды эксцесса: положительный и отрицательный. Интерпретация различных видов асимметрии и эксцесса. Распределение признака и его виды (нормальное, асимметричное, бимодальное). Графическое представление распределения признака.

Понятие о теории вероятностей. Вероятностный характер психологических закономерностей. Испытание и событие. Виды событий: достоверные, невозможные, случайные. Алгебра событий. Классическое определение вероятности и его применение. Вероятность и относительная частота события. Статистическая вероятность. Комбинаторика и вероятность. Алгебра вероятностей. Полная вероятность. Формула Байеса. Случайная величина. Непрерывные и дискретные случайные величины. Распределения случайных величин. Функции распределения и их свойства. Графическое представление функции распределения случайных величин. Вероятность встречаемости отдельных значений признака. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.

РАЗДЕЛ II ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Тема 4 Нормальное распределение

Понятие о распределении признака. Закон распределения. Понятие нормального распределения. Параметры распределения. Кривая нормального распределения. Анализ формы распределения. Свойства нормального распределения. Формула нормальной кривой. Стандартное нормальное распределение и его свойства. Параметры нормального и стандартного нормального распределения. Нормированное отклонение. Функция Лапласа и её использование для вычисления вероятностей встречаемости значений признака в определённом интервале. Величина площади под нормальной кривой. Правило 3σ . Стандартизация и нормализация данных. Стандартизация данных психологических тестов. Порядок и формы перевода первичных результатов в нормализованные стандартные показатели и стандартные шкалы. Разработка тестовых шкал. Проверка нормальности распределения (метод Н.А. Плохинского, метод Е.И. Пустыльника и др.). Причины отклонения распределения от нормального.

Тема 5 Теория оценок

Постановка задачи оценки параметров генеральной совокупности. Параметры и статистики. Понятие оценки параметра генеральной совокупности. Точечное оценивание. Свойства точечных оценок. Меры центральной тенденции как точечные оценки генерального среднего. Меры изменчивости как точечные оценки генеральной дисперсии. Интервальное оценивание. Точность и доверительная вероятность интервальных оценок. Доверительный интервал для генерального среднего. Доверительный интервал для генерального стандартного отклонения. Построение по выборке доверительных интервалов для генерального среднего при известной и неизвестной дисперсии генеральной совокупности. Определение минимального объёма выборки для оценки генерального среднего с заданной точностью и доверительной вероятностью. Определение минимального объёма выборки при известной и неизвестной дисперсии генеральной совокупности. Понятие о пробной выборке. Связь точности, доверительной вероятности и объёма пробной выборки при построении доверительного интервала для генерального среднего.

Тема 6 Проверка статистических гипотез

Основные понятия, используемые в математической обработке психологических данных. Гипотеза как научное предположение, требующее экспериментальной проверки. Виды гипотез: теоретические, эмпирические (статистические), экспериментальные. Классификация теоретических гипотез: описательные и объяснительные гипотезы. Различия между научными и статистическими гипотезами. Нулевая (основная) гипотеза, альтернативная (конкурирующая) гипотеза. Виды выборок (зависимые и независимые), используемые при проверке гипотез. Понятие о степени свободы и уровне статистической значимости. Статистические критерии и их характеристика. Мощность критерия. Параметрические статистические критерии. Непараметрические статистические критерии. Возможности и ограничения параметрических и непараметрических критериев. Общая схема проверки статистической гипотезы. Наблюдаемое значение критерия. Критические значения. Число степеней свободы. Критическая область: зоны «значимости», «незначимости» и «неопределённости». Статистические таблицы (таблицы критических значений). Принцип проверки статистических гипотез. Принятие статистических решений. Ошибки вывода. Ошибка I рода (уровень значимости). Доверительная вероятность. Ошибка II рода. Направленные и ненаправленные альтернативы. Содержательная интерпретация статистического решения.

Тема 7 Корреляционный анализ

Обоснование задачи исследования согласованных изменений. Корреляционная связь. Корреляционная зависимость. Различия между функциональной и корреляционной зависимостями. Классификация корреляционных связей по направ-

лению: положительная («прямая») и отрицательная («обратная») связи. Классификация корреляционных связей по форме: прямолинейные и криволинейные. Понятие о коэффициенте корреляции. Степень, сила (теснота) корреляционной связи. Общая классификация корреляционных связей по силе. Частная классификация корреляционных связей по силе. Наглядное представление корреляции в виде диаграмм рассеяния. Графическое представление корреляции. Меры корреляции: коэффициенты ассоциации, взаимной сопряжённости, рангов, линейной корреляции; корреляционное отношение, множественные коэффициенты корреляции. Меры связи для качественных переменных. Метод ранговой корреляции Спирмена и его характеристика. Меры связи для количественных переменных. Коэффициент линейной корреляции Пирсона и его характеристика. Анализ таблиц сопряженности (ϕ -коэффициент сопряженности). Рангово-бисериальный коэффициент корреляции r_{rb} . Точечный бисериальный коэффициент корреляции r_{pb} . Алгоритм выбора необходимого коэффициента корреляции. Причины низкой корреляции при наличии взаимосвязи между переменными. Выбросы и отклонения распределений от нормальности, их влияние на корреляцию. Понятие «ложной» корреляции. Частная корреляция.

Тема 8 Регрессионный анализ

Понятие о регрессии. Прогнозирование. Фактор и отклик. Парная регрессионная модель. Условия применения регрессионного метода. Уравнение регрессии. Графическое представление задачи прогнозирования: диаграмма рассеяния и линия регрессии. Линейный регрессионный анализ. Способы представления линейной регрессии. Построение уравнения регрессии. Метод наименьших квадратов. Ошибка оценки. Истинное и прогнозируемое значения отклика. Стандартная ошибка оценки. Оценка точности и доверительной вероятности прогноза. Связь точности, доверительной вероятности прогноза и величины коэффициента линейной корреляции, объёмов выборок, их дисперсий. Использование правила 3σ для определения точности и доверительной вероятности прогноза. Коэффициент детерминации и его интерпретация. Возможности повышения точности и доверительной вероятности прогноза.

Понятие о множественной линейной регрессии. Нелинейная регрессия. Нелинейное оценивание.

Тема 9 Сопоставление совокупностей по уровню и однородности признака

Классификация задач психологического исследования и методов их решения. Обоснование задачи сопоставления и сравнения. Выявление различий в уровне исследуемого признака с помощью Q -критерия Розенбаума и U -критерия Манна-Уитни. Сравнение средних двух независимых выборок с помощью t -критерия Стьюдента. Сравнение однородности (дисперсий) двух совокупностей с помощью

F-критерия Фишера. Другие методы выявления различий в уровне признака (*H*-критерий Крускала-Уоллиса, *S*-критерий Джонкира). Алгоритм принятия решения о выборе критерия для сопоставлений.

Тема 10 Оценка достоверности сдвига в значениях исследуемого признака

Обоснование задачи исследования изменений. Сопоставление показателей, полученных у одних и тех же испытуемых по одним и тем же методикам, но в разное время (временной сдвиг). Виды сдвигов в значениях признака: временной сдвиг, ситуационный сдвиг, умозрительный сдвиг, сдвиг под влиянием, структурный сдвиг. Влияние научения на эффективность выявления сдвигов в значениях признака. Использование параллельных форм теста для минимизации влияния научения при оценке достоверности сдвига в значениях признака. Общая классификация сдвигов и критериев оценки их статистической достоверности. Установление общего направления сдвига исследуемого признака (*G*-критерий знаков). Графическое представление и алгоритм применения *G*-критерия знаков. Оценка направленности и выраженности изменений признака (*T*-критерий Вилкоксона). Графическое представление и алгоритм применения *T*-критерия Вилкоксона. Сравнение средних двух зависимых выборок с помощью *t*-критерия Стьюдента. Другие критерии оценки достоверности сдвига в значениях признака (χ^2 -критерий Фридмана, *L*-критерий тенденций Пейджа). Алгоритм принятия решения о выборе критерия для оценки достоверности сдвига.

Тема 11 Выявление различий в распределениях признака

Обоснование задачи сравнения распределений признака. Создание типологий и классификаций по итогам сравнения распределений. Сравнение эмпирического и теоретического (равномерного) распределений (метод χ^2 Пирсона). Проверка нормальности распределения с помощью χ^2 -критерия Пирсона. Сравнение двух и более эмпирических распределений (метод χ^2 Пирсона). Особые случаи применения критерия χ^2 : поправка на непрерывность, использование процедуры укрупнения разрядов. Применение λ -критерия Колмогорова-Смирнова для сравнения распределений. Выводы на основе сопоставления распределений. Алгоритм выбора критерия для сравнения распределений.

Тема 12 Многофункциональные критерии

Понятие многофункциональных критериев. Многофункциональные критерии как эффективная замена традиционных критериев. Понятие эффекта. Эффект как значение качественно определяемого признака. Эффект как уровень количественно измеряемого признака. Эффект как соотношение уровней или значений при-

знака. Сопоставление двух выборок по частоте встречаемости интересующего эффекта (φ^* -угловое преобразование Фишера). Графическое представление и алгоритм применения критерия φ^* -угловое преобразование Фишера. φ^* -угловое преобразование Фишера для качественно и количественно измеренного признака. Биномиальный Z-критерий. Оценка достоверности различий между частотными показателями исследуемого признака в двух независимых выборках с помощью Z-критерия. Применение биномиального Z-критерия для определения достоверности преобладания частоты типичного сдвига в двух зависимых выборках.

Тема 13 Дисперсионный анализ

Понятие дисперсионного анализа (ANOVA). Анализ изменчивости признака под влиянием изменяющихся условий. Фактор и результативный признак. Вариативность, обусловленная действием каждого из факторов. Вариативность, обусловленная взаимодействием исследуемых факторов. Случайная вариативность. Способы разделения переменных на независимые (факторы) и зависимые (результативные признаки). Градации фактора. Влияние индивидуальных особенностей испытуемых на результативный признак. Виды дисперсионного анализа: однофакторный, двухфакторный, многофакторный (MANOVA). Подготовка данных к дисперсионному анализу. Создание комплексов. Уравновешивание комплексов. Проверка нормальности распределения результативного признака. Преобразование эмпирических данных с целью упрощения расчётов. Однофакторный дисперсионный анализ для связанных выборок. Оценка влияния разных условий на одну и ту же выборку. Однофакторный дисперсионный анализ для несвязанных выборок. Исследование одновременного влияния двух факторов на разные выборки испытуемых. Двухфакторный дисперсионный анализ для связанных выборок. Исследование действия двух факторов на одну и ту же выборку испытуемых. Двухфакторный дисперсионный анализ для несвязанных выборок.

РАЗДЕЛ III МНОГОМЕРНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Тема 14 Многомерный статистический анализ

Многомерные статистические методы как средство моделирования психических явлений. Классификация методов многомерного анализа (по назначению метода, по способу сопоставления данных, по виду исходных эмпирических данных). Факторный анализ и его виды: метод главных компонент и собственно факторный анализ. Задачи факторного анализа: снижение размерности (редукция данных) и классификация переменных. Факторизация данных и ее этапы.

Факторные нагрузки и оценки. Вращение факторов. Последовательность факторного анализа. Кластерный анализ и его задача. Методы кластерного анализа: агломеративный (объединительный) и итеративный. Графическое представление кластерного анализа в виде дендрограммы. Последовательность кластеризации данных. Множественный регрессионный анализ и его задачи. Логистический регрессионный анализ его виды. Понятие о дискриминантном анализе. Многомерный корреляционный анализ: коэффициент множественной корреляции, частный коэффициент корреляции. Многомерное шкалирование.

Тема 15 Математические модели в психологии

История применения математических методов в психологической науке. Методологические проблемы использования математики в психологии. Проблема математического моделирования психических явлений. Виды и функции моделей. Методы многомерного анализа как средства построения моделей: классификации, латентных структур, семантических пространств и т.п. Основные направления моделирования в психологии: моделирование психики и психологическое моделирование. Создание описательных моделей. Построение действующих моделей. Математическое моделирование психических явлений. Идеи теории информации, кибернетики в психологии. Математические модели систем "человек-машина". Моделирование когнитивных процессов и структур. Моделирование регуляционных процессов психики и личности. Проблема искусственного интеллекта. Нетрадиционные методы моделирования.

Математико-статистическая обработка результатов психологического исследования с использованием компьютерных пакетов STATISTICA, SPSS и др. Возможности и ограничения конкретных компьютерных методов статистической обработки данных.

Нормативы представления результатов анализа данных в научной психологии.

ЧАСТЬ I

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Тема 1 Способы получения статистических данных в психологии

План:

1. Понятие о математической статистике и ее методах.
2. Основные этапы статистического анализа результатов психологического исследования.
3. Признаки и переменные в психологии.
4. Психологические измерения и их виды.
5. Психологическое шкалирование.

Основные понятия и термины: *математическая статистика, статистические данные, описательная статистика, индуктивная статистика, планирование и анализ эксперимента, методы статистической обработки данных, переменная, количественная переменная, качественная переменная, дискретная переменная, непрерывная переменная, зависимая переменная, независимая переменная, измерение, номинальная шкала, порядковая шкала, интервальная шкала, шкала равных отношений, мощность шкалы, ранжирование.*

1. Понятие о математической статистике и ее методах

Математическая статистика (от итальянского «statio» – государство) – раздел математики, который изучает методы сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для получения научных и практических выводов.

Первая задача математической статистики – определить способы сбора и группировки статистических данных.

Вторая задача математической статистики состоит в разработке методов анализа статистических данных в зависимости от целей исследования [4].

Статистические данные – это совокупность чисел, полученных эмпирическим путем, представляющая собой количественные признаки изучаемых объектов. Эти данные получают в результате специально организованных исследований, в том числе психологических.

Математическая статистика включает три раздела [4]:

1) *описательная (дискриптивная) статистика* занимается описанием, систематизацией, графическим представлением и табулированием данных, полученных в ходе исследования, а также выявлением центральных тенденций распределения и оценки разброса данных;

2) *индуктивная (аналитическая) статистика* или *теория статистического вывода* занимается проверкой того, можно ли результаты, полученные на ограниченной совокупности объектов, распространить на всю совокупность объектов данного вида. Базируется на описательной статистике;

3) *планирование и анализ эксперимента* – статистические методы, разработанные для обнаружения и проверки причинной связи между изучаемыми показателями (переменными).

Методы статистической обработки – это способы количественных расчетов, математические формулы и приемы, которые позволяют обобщать эмпирические данные, выявляя скрытые в них закономерности. Они подразделяются на первичные и вторичные [3; 19].

Первичными методами статистической обработки называют методы, с помощью которых получают показатели, непосредственно отражающие результаты эмпирических исследований: вычисление мер центральной тенденции (среднего значения, моды, медианы), мер изменчивости (размаха, дисперсии, стандартного отклонения), наглядное представление данных в виде графиков и диаграмм.

Вторичными называют методы статистической обработки, которые, используя первичные данные, позволяют выявить скрытые статистические закономерности, произвести качественный анализ данных: выдвижение статистических гипотез, подготовка данных для применения статистических методов (например, проверка нормальности распределения, уравнивание дисперсионных комплексов и др.), проверка гипотез с помощью выбранных статистических критериев, формулирование выводов, имеющих определенную доверительную вероятность.

Использование математико-статистического анализа эмпирических данных позволяет [9; 13]:

- 1) более четко и лаконично описывать изучаемые объекты, обобщать данные исследования;
- 2) выявлять наличие существенных различий между группами, количественно сравнивая исследуемые признаки;
- 3) устанавливать скрытые причины и суть психологических явлений;
- 4) повышать доказательность выводов, сопроводив их статистическим подтверждением.

При проведении математико-статистического анализа данных, полученных в ходе исследования, возможны следующие ошибки [11]:

1. Переоценка роли математической статистики. В этом случае психологическое содержание может быть сведено до уровня математических средств.

Преодолеть ошибку можно, если использовать математические средства, адекватные психологическому содержанию (т.е. отражающие все интересующие исследователя свойства), а само психологическое содержание рассматривать как приоритетное. Например, закон Вебера-Фехнера, который связывает силу ощущения (E) с интенсивностью раздражителя (P), с учетом определенной сенсорной системы:

$$E = k \cdot \log P + c,$$

где k и c – постоянные величины, определяемые сенсорной системой.

2. Недооценка роли математической статистики. Исследователь оперирует только средними значениями или процентами. При этом трудно увидеть существующие тенденции, установить закономерности и взаимосвязи между изучаемыми признаками.

3. Рассмотрение выявленных корреляционных связей как причинно-следственных, например, взаимосвязь между успеваемостью школьников и их самооценкой. Исследователь не замечает, что существует третья переменная – трудолюбие, – которая может оказывать влияние на две предыдущие. Однако в отдельных случаях корреляционные связи могут быть причинно-следственными. Например, взаимосвязь между возрастом и процессом запоминания: именно возраст является причиной уменьшения количества запоминаемых слов у пожилых людей.

2. Основные этапы статистического анализа результатов психологического исследования

Выделяют следующие этапы статистического анализа данных [26]:

1 этап – исходный предварительный анализ исследуемой реальной системы, в результате которого определяются:

- основные цели исследования на содержательном неформализованном уровне;
- совокупность единиц, представляющих предмет статистического исследования;
- перечень отобранных из представленных специалистами априорных (независимых от опыта человека) показателей, характеризующих каждый из исследуемых объектов;
- степень формализации соответствующих записей при сборе исходных данных;
- общее время и трудозатраты на планируемые работы;
- формализованная постановка задачи, по возможности включающая статистическую модель изучаемого явления.

2 этап – составление детального плана сбора исходной информации. При составлении этого плана необходимо по возможности учитывать полную схему дальнейшего статистического анализа.

3 этап – сбор исходного материала и ввод этих данных в ЭВМ.

4 этап – первичная статистическая обработка данных. В ходе этой обработки решаются следующие задачи:

- а) отображение переменных, описанных текстом в номинальную или порядковую шкалу;
- б) анализ резко выделяющихся наблюдений;
- в) восстановление пропущенных наблюдений;
- г) проверка статистической независимости элементов исходной выборки.

5 этап – составление детального плана вычислительного анализа исходного материала. На этом этапе определяются основные группы, для которых будет

проводиться дальнейший анализ. Обычно описывается блок-схема анализа с указанием привлекаемого метода.

6 этап – вычислительная реализация основной части статистической обработки данных.

7 этап – подведение итогов исследования. На этом этапе проверяется, в какой мере достигнуты сформулированные на первом этапе содержательные цели работы. Если эти цели не достигнуты, то объясняется, почему. Работа завершается содержательной формулировкой новых задач, вытекающих из проведенного исследования.

3. Признаки и переменные в психологии

Одним из основных понятий, используемых в математической обработке психологических данных, является понятие «переменная», или «признак». При определении данного понятия сложилось два подхода.

В соответствии с первым подходом [8; 10; 27 и др.] *переменная*, или *признак*, – это любая реальность, которая может быть подвергнута измерению. В качестве объектов измерения в психологии рассматриваются психические процессы, особенности, свойства индивидов. Так, скорость выполнения теста испытуемыми, их социометрический статус, количество допущенных ошибок и другие измеряемые психологические характеристики являются переменными.

Переменные могут принимать различные значения, которые определяются при помощи специальных шкал измерения. В случае, когда необходимо указать степень выраженности признака, используют понятия «показатель», или «уровень», с такими определениями, как «высокий» или «низкий»: например, высокий уровень интеллекта, низкие показатели тревожности.

Представители второго подхода [18] предлагают различать объекты исследования (различные аспекты реальности), свойства объектов и признаки, которые отражают выраженность этих свойств, как правило, с помощью чисел. Каждый признак выступает в качестве переменной величины (или просто переменной), значения которой меняются от объекта к объекту. С помощью шкал измерения устанавливается соответствие между исследуемым свойством объекта и результатом измерения – переменной. Таким образом, *переменная* или *признак* – это выражение какого-либо свойства изучаемого объекта, полученное в результате процедуры измерения.

Поскольку в научном исследовании необходимо разделять свойства изучаемых объектов и их признаки, то экспериментатору корректнее использовать второй подход и рассматривать переменную как результат измерения определенного свойства изучаемого объекта.

Психологические переменные являются случайными величинами, поскольку заранее неизвестно, какое именно значение они примут [27].

В психологии рассматривают следующие виды переменных [8; 11]:

1. *Количественные и качественные переменные.* В случае качественных переменных различия между признаками выражаются в каких-либо качествах (например, мужской или женский пол), а в случае количественных – различия вы-

ражаются количественно (например, коэффициент интеллектуальности $IQ = 115$ или $IQ = 100$).

Количественные переменные могут быть двух видов: дискретные и непрерывные.

Дискретной (прерывистой) называется переменная, принимающая значения, которые можно задать в виде бесконечной или конечной числовой последовательности [5]. В этом случае различия между признаками выражаются числами, между которыми нет и не может быть переходов. Например, оценки, полученные студентами на экзамене.

Непрерывной называется переменная, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка [5]. Например, средний балл успеваемости студентов за семестр, время реакции испытуемых и т.д.

2. *Независимые и зависимые переменные.* Независимой является переменная, которую экспериментатор может изменять по своему замыслу; она отражает причину. Зависимая переменная – это та переменная, которая изменяет свои значения под воздействием независимой; она является следствием. Зависимая переменная является тем признаком, который измеряется экспериментатором. Например, если исследуется эффективность поощрения по отношению к личности учащегося, то независимой переменной будет поощрение, а изменения в личности учащегося (самооценки, отношения к учению и др.) – зависимой [11].

С независимой переменной тесно связаны *контролируемые* переменные – переменные, которые могут оказывать влияние на зависимую переменную. При проведении исследования экспериментатор должен максимально учесть (зафиксировать, сохранить постоянными) контролируемые переменные. Идеальным является эксперимент, когда изменяется только независимая переменная при постоянстве всех остальных (контролируемых) переменных. В предыдущем примере в качестве контролируемой переменной можно рассматривать возраст учащихся, их пол и т.д. [11].

4. Психологические измерения и их виды

Измерение в разных науках понимается по-разному. В психологии вначале использовался физический подход к измерению. Измерение рассматривалось как совокупность действий, выполняемых с помощью измерительных средств с целью нахождения числового значения измеряемой величины, выраженной в принятых единицах измерения. Это можно записать в виде формулы

$$y = a \cdot x,$$

где y – измеряемая величина, a – единица измерения, x – числовой результат измерения ($x=y:a$) [28]. Например, измерение длины: $5 \text{ см} = 1 \text{ см} \cdot 5$.

Измерения в психологии начинались с изучения ощущений, получаемых от различных раздражителей (острота слуха, цветоразличение), при этом использовали физический подход. Но когда исследователи обратились к измерению более сложных психических объектов (интеллекта, способностей), то от физиче-

ской трактовки измерения отказались (например, что считать величиной интеллекта и единицей его измерения).

Психологическую трактовку измерения предложил С. Стивенс: *измерение* – это приписывание чисел объектам в соответствии с определенными правилами [28]. Например, измерить рост – это приписать число расстоянию между макушкой и подошвой ног, найденному с помощью линейки; измерить интеллект – это найти коэффициент интеллектуальности путем присвоения числа ответной реакции человека, возникающей у него на группу типовых задач. То есть измерение преобразует свойства наших восприятий в числа, которые легко поддаются обработке. Такая трактовка измерения позволяет осуществлять измерения не только в психологии, но и в экономике, социологии и т.д., а физические измерения рассматривать как частный случай измерений.

Измерение в психологии связано с количественной оценкой свойств объектов. В основе измерения лежит операция сравнения. Особенности психологического измерения позволяют выделить три его вида: нормативное, критериальное и ипсативное [33].

Нормативное измерение – это сравнение значений показателей испытуемого со значениями распределения аналогичных показателей в эталонной группе лиц. Для этого результаты индивидуального тестирования включают в систему соотносительных оценок, разработанных на большой группе испытуемых, определяя относительный статус испытуемого. Нормативное измерение наиболее общепринято. Примером такого измерения является измерение коэффициента интеллектуальности IQ.

Критериальное измерение основано на прямой оценке качества выполнения теста испытуемым без сравнения с показателями других людей. Оценка результатов испытуемого состоит в их сравнении с установленным экспертным или эмпирическим путем стандартом выполнения задания, определенным объективным уровнем развития качества. Критериальное измерение предполагает определение не относительного, а абсолютного статуса испытуемого, оцениваемого по результатам теста. Оно направлено на оценку компетентности обследуемого в четко определенной области, а не на измерение каких-либо абстрактных свойств. Этот вид измерения наиболее часто используется в педагогической практике для оценки знаний, умений и навыков обучающихся.

Ипсативное измерение ориентировано на оценку внутрииндивидуальных соотношений и не связано с изучением межиндивидуальных различий. В силу этого значение показателей сравнивается не с групповой, а с индивидуальной нормой. Примером подобного измерения может служить сравнение величин физиологических показателей испытуемого в различных ситуациях с нормой, характерной для него: например, сравнение частоты пульса человека после нагрузки с частотой, характерной для него в состоянии покоя.

Г.В. Суходольский выделяет следующие виды измерений [28]:

1.1. Прямые измерения – в них измеряемая величина прямо сопоставляется с мерой. Например, прямо измеряется длина стола линейкой, подсчитывается количество испытуемых.

1.2. Косвенные измерения – в них вначале прямо измеряются другие величины, с которыми функционально связана косвенно измеряемая интересующая нас величина. Например, температура тела косвенно измеряется высотой столбика ртути в термометре; эмоциональная привлекательность человека косвенно определяется числом положительных выборов членов группы в социометрии.

2.1. Непосредственные измерения – выполняются с помощью органов чувств («на вкус», «на глаз»), а также на основании личного опыта. Например, глазомерная оценка расстояния, педагогическая оценка успеваемости.

2.2. Опосредованные (приборные) измерения – выполняются с помощью измерительных приборов или подручных средств. Например, с помощью наручных часов измеряется время, а с помощью спичечного коробка – длина предмета; с помощью отрезка, начерченного на бумаге и принятого за 100%, на котором точкой нужно указать степень выраженности у себя какого-либо качества (ум, характер, здоровье), измеряется самооценка (методика Дембо-Рубинштейн).

3.1. Одномерные измерения – выполняются для сравнительно простых объектов, которые можно описать с помощью одной характеристики. Все предыдущие примеры, кроме последнего, – это измерение одномерных величин.

3.2. Многомерные измерения – выполняются для объектов, описываемых с помощью совокупности разных свойств, которые можно охарактеризовать с помощью многомерных величин. Эти величины часто несравнимы в количественном отношении. Поэтому их измеряют отдельно и затем сводят воедино. Например, пол, уровень тревожности и успеваемость.

4.1. Малочисленные измерения (в том числе и одноразовые) – используются для измерения величин, которые слабо изменяются. Для постоянной величины (например, пол) достаточно одного замера, для незначительно изменяемой (например, возраст) требуется от нескольких единиц до нескольких десятков измерений.

4.2. Многочисленные (многократные) измерения – используются для сильно изменяющейся величины, при этом требуются сотни, тысячи измерений, чтобы выявить редкие, маловероятные значения. В психологии, как правило, проводятся многочисленные измерения, поскольку психические процессы весьма вариативны.

5.1. Зависимые измерения – применяются в том случае, если результаты измерений зависимы друг от друга, что проявляется в их совместной изменчивости. Эта изменчивость может быть обусловлена либо сущностью объекта, либо способом измерения, либо их сочетанием (например, успеваемость студента и количество выкуриваемых им в день сигарет).

5.2. Независимые измерения – если результаты измерений независимы, они измеряются независимо друг от друга (например, пол и возраст студента).

Для формализации процесса измерения используются специальные символы, операции и условные обозначения, которые будут рассмотрены далее.

5. Психологическое шкалирование

Большое значение при обработке данных приобретает выбор шкал измерения психологических переменных.

Шкала измерения – это форма фиксации совокупности признаков изучаемого объекта с упорядочиванием их в определенную числовую систему [3, с. 51].

Шкалы измерений представляют собой метрические системы, моделирующие исследуемые явления или объекты путем замены прямых обозначений изучаемых объектов числовыми в соответствии с определенными правилами. Операция упорядочивания исходных эмпирических данных в шкальные называется шкалированием [3].

С. Стивенсом предложена классификация из четырех типов измерительных шкал. Рассмотрим ее подробнее [18; 27]:

1. *Номинальная (номинативная или шкала наименований)*. Это шкала, которая классифицирует объекты по названию. Название не измеряет объект количественно, а лишь позволяет отделить один объект от другого. Например, участники международных соревнований могут быть расклассифицированы как русские, немцы, белорусы и т.д.

Если объект может быть отнесен только к одному из двух классов, то такая шкала называется *номинальной дихотомической*, а признак называется альтернативным. Например, классификация по полу (мужской-женский).

В номинальной шкале признак может быть отнесен к трем, четырем и более классам, которые не должны пересекаться. Расклассифицировав все объекты измерений, мы можем от наименований перейти к числам, подсчитав количество наблюдений в каждом классе (т.е. частоту встречаемости признака), и работать с частотами с помощью математических методов. Данные, представленные в этой шкале, могут быть обработаны с помощью биномиального Z -критерия, χ^2 -критерия Пирсона, а также ϕ^* -углового преобразования Фишера.

2. *Ранговая (порядковая) шкала*. Она используется для отнесения объектов к определенному классу в соответствии со степенью выраженности заданного свойства изучаемого объекта, (например, места спортсменов на соревновании). В ранговой шкале мы не знаем расстояния между классами, но знаем, что они образуют упорядоченную последовательность. От классов легко перейти к числам, если считать, что самый низкий класс получает ранг 1, следующий – ранг 2 и т.д., или наоборот, самый высокий класс получает ранг 1, следующий – ранг 2 и т.д.

При шкалировании с помощью порядковой шкалы в классификации должно быть не менее трех классов. Чем больше классов в шкале, тем больше возможностей имеется для математической обработки данных. В этой шкале могут быть применены практически все непараметрические критерии: U -критерий Манна-Уитни, Q -критерий Розенбаума и др.

3. *Интервальная шкала (шкала равных интервалов)* обладает всеми свойствами ранговой шкалы, но в ней известны расстояния между классами. Классы объектов в шкале интервалов всегда дискретны и упорядочены по возрастанию или убыванию измеряемого свойства. Каждое из возможных значений признака

отстоит от другого на равном расстоянии. Например, оценки студентов на экзамене. Интервальные шкалы позволяют количественно описывать различия между свойствами объектов. В них имеют смысл арифметические операции и можно определить, *насколько* один класс превосходит другой.

Для задания этой шкалы устанавливают единицу измерения и произвольную точку отсчета. Примерами таких шкал в психологии являются шкалы в единицах стандартного отклонения и процентильные шкалы при условии нормальности распределения признака (шкала стенов, шкала Векслера и др.). Измерение психологических явлений в секундах, миллиметрах не всегда можно считать измерением в интервальной шкале, а только в шкале порядка. Например, при измерении мышечного волевого усилия на динамометре с подвижной стрелкой «цена» каждой последней секунды отличается от «цены» одной секунды в первые полминуты.

Данные, измеренные в шкале интервалов, могут быть обработаны с помощью параметрических критериев при выполнении дополнительных условий (например, нормального распределения признака).

4. *Шкала равных отношений (абсолютная шкала)*. В этой шкале объекты классифицируют пропорционально степени выраженности измеряемого свойства. Классы обозначаются числами, пропорциональными друг другу. Это позволяет определить, *во сколько* раз один класс превосходит другой. Например, результаты (в секундах) бегунов на соревнованиях.

Для задания этой шкалы устанавливают единицу измерения и абсолютную точку отсчета, соответствующую полному отсутствию выраженности измеряемого свойства. В психологии примером измерений, проведенных в шкалах равных отношений, является измерение времени реакции и абсолютных порогов чувствительности.

К данным, полученным по шкале равных отношений, применимы статистические критерии, в которых используются частоты встречаемости отдельных значений признака.

Номинальная и ранговая шкалы являются качественными шкалами, а интервальная шкала и шкала равных отношений – количественными (метрическими) шкалами.

Эмпирические данные, полученные в одной шкале, можно перевести в другую в следующем направлении: количественная шкала (результаты спортсменов на соревнованиях) переводится в порядковую шкалу (места спортсменов на соревнованиях), а затем в номинальную шкалу (число представителей страны, участвующих в соревнованиях). Поэтому нужно стремиться проводить измерения в количественных шкалах, т.к. это позволяет перейти к качественным шкалам с частичной потерей информации. Такой переход от одной шкалы к другой называют переходом с понижением мощности шкалы [26]. *Мощность шкалы* – это ее дифференцирующая способность. Менее мощные шкалы отражают меньше информации о различии объектов по измеряемому свойству. По мере возрастания мощности шкалы располагаются следующим образом: номинальная, порядковая, интервальная, шкала равных отношений. Определение того, в какой шкале из-

мерен признак, является ключевым моментом анализа данных исследования. В психологии чаще всего результаты представлены в порядковой шкале [18].

Перевод исходных данных из количественных шкал в порядковую шкалу называется *ранжированием*. Для ранжирования необходимо [9]:

а) упорядочить исходные данные по возрастанию (убыванию);

б) каждому значению присвоить *ранг* – число, соответствующее порядковому номеру элемента в упорядоченной последовательности данных:

– если данные упорядочены по возрастанию, то ранг 1 присваивают наименьшему значению, если по убыванию – наибольшему;

– если значения признака совпадают, им присваивается один и тот же ранг, равный среднему арифметическому тех рангов, которые были бы им присвоены в случае их несовпадения. Эти ранги называются *связанными рангами*. Далее ранжирование производится так, как если бы ранги были разными.

Для проверки правильности вычисления рангов, вне зависимости от наличия или отсутствия связанных рангов, используется следующая формула:

$$\sum_{i=1}^n R_i = \frac{n(n+1)}{2},$$

где $\sum_{i=1}^n R_i$ – сумма рангов, n – количество ранжируемых значений.

Пример. Проранжировать следующий массив данных: 16, 24, 16, 14, 11, 28, 12, 36, 28, 22, 28.

Решение.

Упорядочим выборку по возрастанию:

11, 12, 14, 16, 16, 22, 24, 28, 28, 28, 36.

Определим *условные ранги* [10], присвоив порядковый номер каждому значению:

Значения	11	12	14	16	16	22	24	28	28	28	36
Условные ранги	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Вычислим связанные ранги:

- для значения 16: $(4 + 5) : 2 = 4,5$;

- для значения 28: $(8 + 9 + 10) : 3 = 27 : 3 = 9$.

Присвоим ранги, учитывая наличие связанных рангов, исходным данным:

Значения	11	12	14	16	16	22	24	28	28	28	36
Условные ранги	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ранги	1	2	3	4,5	4,5	6	7	9	9	9	11

Проверим правильность ранжирования:

$$\sum_{i=1}^n R_i = 1 + 2 + 3 + 4,5 \times 2 + 6 + 7 + 9 \times 3 + 11 = 1 + 2 + 3 + 9 + 6 + 7 + 27 + 11 = 66.$$

По формуле для вычисления суммы рангов для $n = 11$ получаем

$$\sum_{i=1}^n R_i = n \times (n + 1) : 2 = 11 \times (11 + 1) : 2 = 66.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. *Дайте определение математической статистики как науки.*
2. *Назовите основные разделы математической статистики.*
3. *Что такое статистические данные?*
4. *Перечислите основные группы методов статистической обработки данных.*
5. *Охарактеризуйте достоинства математико-статистического анализа данных.*
6. *Расскажите о типичных ошибках при проведении математико-статистического анализа данных.*
7. *Перечислите основные этапы статистической обработки данных.*
8. *Охарактеризуйте различные подходы к определению понятия «переменная» в психологии.*
9. *Дайте определения количественной и качественной переменной. Приведите примеры.*
10. *Дайте определения дискретной и непрерывной переменной. Приведите примеры.*
11. *Дайте определения независимой и зависимой переменной. Приведите примеры.*
12. *Как понимают измерение в физике; в психологии?*
13. *Приведите классификацию измерений.*
14. *Дайте определение шкалы измерения. Перечислите основные виды измерительных шкал.*
15. *Охарактеризуйте номинальную шкалу.*
16. *Охарактеризуйте порядковую шкалу.*
17. *Охарактеризуйте интервальную шкалу.*
18. *Охарактеризуйте шкалу равных отношений.*
19. *Что такое мощность шкалы?*
20. *Что называют ранжированием? Перечислите правила ранжирования данных.*
21. *Какие ранги называют связанными? Как они рассчитываются?*
22. *Как проверяется правильность ранжирования?*

Тема 2 Табулирование и наглядное представление данных

План:

1. Понятие о генеральной совокупности и выборке.
2. Способы формирования выборки.
3. Распределение частот и табулирование данных.
4. Графическое представление эмпирических данных.
5. Квантили и их интерпретация.

Основные понятия и термины: генеральная совокупность, выборка, объем выборки, репрезентативная выборка, выборка стандартизации, варианта, вариационный ряд, частота варианты, относительная частота варианты, накопленная частота варианты, статистическое распределение выборки, распределение частот, интервальное распределение, полигон частот, гистограмма, точечная диаграмма, квантиль, квартиль, внутриквартильный размах, дециль, процентиль.

1. Понятие о генеральной совокупности и выборке

Генеральная совокупность – это совокупность всех мысленно возможных объектов интересующего исследователя типа, для которых могут быть проведены измерения при данном реальном комплексе условий. Генеральная совокупность является математически абстрактным понятием и содержит такое большое количество объектов, что практически изучить их невозможно. Поэтому реальное исследование проводится на выборочной совокупности [26].

Выборочная совокупность (выборка) – это совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности для изучения интересующего исследователя свойства [26].

Число элементов в выборке называют *объемом выборки* и обозначают n . Объем генеральной совокупности обозначают N .

Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то $N = 1000$, а $n = 100$.

Примечание. Полезно знать, что в современной практике статистической обработки данных символ N может использоваться для обозначения объема выборочной совокупности (например, в программных пакетах STATISTICA, SPSS).

В зависимости от количества наблюдений выборочные совокупности подразделяются на три группы [18]:

- малые – до 30 наблюдений;
- средние – от 30 до 200 наблюдений;
- большие – от 200 наблюдений и выше.

Объем выборки определяется теми задачами, которые стоят перед исследователем [18]:

- если разрабатывается диагностическая методика, то объем выборки может варьировать от 200 до 1000 (иногда 2500) наблюдений;

- если сравниваются две выборки, то сумма наблюдений в обеих выборках должна быть не менее 50: $n_1 + n_2 \geq 50$;

- если изучается взаимосвязь между свойствами, то количество наблюдений составляет примерно 30–35;

- чем больше изменчивость изучаемого свойства, тем больше должен быть объем выборки. Изменчивость свойства можно уменьшить, увеличив однородность выборки, например, по полу, возрасту, уровню образования и т.д.

Сущность статистических методов состоит в том, чтобы по результатам исследований, полученных на выборке, можно было судить о свойствах генераль-

ной совокупности в целом. Достоверность выводов, получаемых в результате статистической обработки исходных данных, зависит от того, насколько выборка является репрезентативной (представительной).

Репрезентативной является выборка, элементы которой правильно представляют пропорции генеральной совокупности [7]. В этом случае выборка будет представлять изучаемое явление достаточно полно с точки зрения его изменчивости в генеральной совокупности.

Выборка, на которой разрабатываются нормы выполнения теста, называется *выборкой стандартизации*. При формировании выборки стандартизации руководствуются следующими правилами: а) выборка должна состоять из респондентов, на которых ориентирован тест, и быть однородной; б) выборка должна иметь большой объем (свыше 200 наблюдений); в) выборка должна быть репрезентативной, для чего отбор испытуемых в выборку должен носить случайный характер [3].

2. Способы формирования выборки

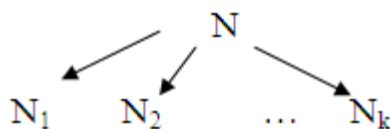
Важнейшим условием повышения степени репрезентативности выборки является достижение полностью случайного отбора объектов из генеральной совокупности. Это означает, что все ее объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку [7].

При отборе объектов из генеральной совокупности для получения выборки используются следующие способы [26]:

1. *Простой случайный отбор*. Объекты генеральной совокупности, имеющей объем N , нумеруют от 1 до N . Затем, используя таблицу случайных чисел или процедуру жеребьевки (например, корзину с пронумерованными карточками), отбирают n объектов выборки.

2. *Простой отбор с помощью регулярной, но не существенной для изучаемого явления процедуры* (например, отбор испытуемых по их номеру в списке).

3. *Стратифицированный (расслоенный)*. В этом случае генеральная совокупность объема N разделяется на непересекающиеся подсовокупности (страты, слои) N_1, N_2, \dots, N_k .



Из каждого слоя извлекается простая случайная выборка, имеющая объем n_1, n_2, \dots, n_k соответственно, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Стратифицированный отбор применяется, когда объекты внутри каждого слоя являются однородными по изучаемому свойству. Например, все студенты вуза могут быть разделены на 5 страт – студенты 1 курса, 2 курса, 3 курса, 4 курса и 5 курса.

4. *Серийный (гнездовой) отбор*. Он применяется, если удобно исследовать не отдельные элементы генеральной совокупности, а целые блоки или серии та-

ких элементов. Например, исследуются все ученики одного класса или все семьи в одном доме.

5. *Комбинированный (ступенчатый)*. Он объединяет в себя несколько вышеперечисленных способов отбора, которые составляют различные ступени выборочного исследования.

Например, исследователю необходимо представить репрезентативную выборку первоклассников. Генеральной совокупностью являются все учащиеся 1 класса нашей страны. Первый этап – простой случайный отбор: нумеруют области от 1 до 6 и с помощью жеребьевки определяют одну из них. Второй этап – простой отбор с помощью регулярной процедуры: в пределах области выбирают район, в названии которого содержится пять определенных букв. Третий этап – стратифицированный отбор: в районе делят все школы на городские, поселковые, сельские. Четвертый этап – в городе (поселке) используют серийный отбор: выбирают учащихся 1 класса определенной школы; они и составляют выборку, на которой будет проводиться исследование.

3. Распределение частот и табулирование данных

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n . Исследуется некий признак (например, уровень интеллекта, время реакции и т.д.). Тогда каждый элемент выборки может принимать различные значения исследуемого признака, которые обозначают x_1, x_2, \dots, x_k , где $k \leq n$. Значение признака называют *вариантой* x_i , где i – порядковый номер варианты.

Последовательность вариантов, упорядоченная по возрастанию, называется *вариационным рядом*. Число появлений варианты x_i называют *частотой варианты* и обозначают n_i [7].

Например, в результате исследования получены следующие данные: 8, 5, 7, 8, 5, 8, 6. Представим их в виде вариационного ряда: 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8. Исследуемый признак принимает четыре значения $x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = 7, x_4 = 8$, которые имеют следующую частоту: $n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 1, n_4 = 3$.

Сумма частот всех вариантов равна объему выборки

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^k n_i = n$$

Для предыдущего примера $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 2 + 1 + 1 + 3 = 7; n = 7$.

Отношение частоты варианты n_i к объему выборки n называется *относительной частотой* варианты и обозначается w_i : $w_i = n_i / n$ [7].

Сумма всех относительных частот равна 1:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_k = 1$$

Для предыдущего примера $w_1 + w_2 + \dots + w_k = 2/7 + 1/7 + 1/7 + 3/7 = 7/7 = 1$.

Частоту и (или) относительную частоту варианты x_i иногда обозначают $f(x_i)$ [9; 18] или просто f [13].

Для характеристики вариационного ряда наряду с частотой и относительной частотой варианты используется накопленная частота. *Накопленной частотой*

той варианты x_i (Σf_i) называют величиной, которая показывает, сколько значений признака не превышает заданного значения варианты x_i [7].

Накопленную частоту варианты x_i в упорядоченной выборке можно рассчитать по формуле $\Sigma f_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i$.

Например, для представленного выше вариационного ряда накопленная частота для варианты x_3 определяется так: $\Sigma f_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 1 + 1 = 4$.

Первичная обработка данных, полученных в результате измерения, заключается в их описании, упорядочении, табулировании и представлении в виде, удобном для дальнейшей обработки. Для этого выборку представляют в виде *статистического распределения*, которое может быть задано двумя способами [7]:

а) в виде распределения частот (относительных частот) – перечня вариантов и соответствующих им частот (относительных частот);

б) в виде интервального распределения (распределения сгруппированных частот) – последовательности интервалов и соответствующих им частот (относительных частот).

Распределение частот, как правило, используется в случае, если измеряемая переменная является дискретной, а интервальное распределение – если переменная непрерывна.

Пример 1. В результате эмпирического исследования получены следующие данные: 1, 2, 1, 3, 5, 6, 7, 1, 2, 4, 5, 6, 3. Задать статистическое распределение выборки.

Решение. Определим объем выборки: $n = 13$.

Построим вариационный ряд: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7.

Зададим статистическое распределение выборки в виде частот и относительных частот:

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	3	2	2	1	2	2	1
w_i	1/13	2/13	2/13	1/13	2/13	2/13	1/13

Контроль: $3 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 13$;

$3/13 + 2/13 + 2/13 + 1/13 + 2/13 + 2/13 + 1/13 = 13/13 = 1$.

Если исследуемая переменная принимает большое число различных значений, то удобнее использовать статистическое распределение в виде интервального распределения. Для этого производят табулирование данных, т.е. представляют исходную выборку в виде таблицы соответствующей структуры. Табулирование данных осуществляется в четыре этапа [13; 26]:

1-й этап – определение размаха выборки R . Для этого из максимального значения выборки вычитают минимальное: $R = x_{\max} - x_{\min}$;

2-й этап – определение ширины интервала группирования данных h . Прежде чем искать ширину интервала, необходимо определить количество интервалов группирования $k \approx \sqrt{n}$, где n – объем выборки. После этого в качестве требуемого количества интервалов выбирается целое число, полученное в результате округления значения \sqrt{n} в сторону увеличения;

Ширина интервала группирования h получается путем деления размаха выборки на количество интервалов: $h = \frac{R}{k}$.

3-й этап – определение границ частичных интервалов группирования данных. При этом левая граница первого интервала должна быть меньше либо равна x_{\min} . Каждая последующая граница получается из предыдущей путем прибавления ширины интервала. Правая граница последнего интервала должна быть больше либо равна x_{\max} :

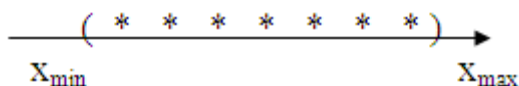


Рис. 2.1. Графическое представление границ частичных интервалов группирования данных

4-й этап – непосредственно табулирование данных. При этом подсчитывается, сколько элементов выборки попало в каждый частичный интервал. Значения, попадающие точно на границу интервала, учитываются один раз. Результатом табулирования данных является таблица, состоящая из трех столбцов, первый из которых содержит границы частичных интервалов, второй – частоты, третий – относительные частоты. Можно включить в таблицу четвертый столбец для подсчета частот, используя метки.

Пример 2 [26]. В результате измерения скорости чтения в классе из 38 учеников были получены следующие результаты: 90, 66, 106, 84, 105, 83, 104, 82, 97, 97, 59, 95, 78, 70, 47, 95, 100, 69, 44, 80, 75, 75, 51, 109, 89, 58, 59, 72, 74, 75, 81, 71, 68, 112, 62, 91, 93, 84. Задать статистическое распределение выборки.

Решение. Воспользуемся интервальным распределением частот.

1) определим размах выборки:

$$x_{\max} = 112, x_{\min} = 44, R = x_{\max} - x_{\min} = 112 - 44 = 68.$$

2) определим ширину интервала группирования данных h :

$$n = 38, k \approx \sqrt{n} = \sqrt{38} \approx 6,2 \approx 7; h = \frac{R}{k}; h = 68 : 7 \approx 9,7 \approx 10.$$

Левую границу первого частичного интервала выбираем равной $x_{\max} = 44$, все последующие границы получаем из предыдущей прибавлением ширины интервала группирования $h = 10$.

Границы частичных интервалов	Частота	Относительная частота	Подсчет
[44; 54)	3	3/38	///
[54; 64)	4	4/38	////
[64; 74)	6	6/38	////////
[74; 84)	9	9/38	//////////
[84; 94)	6	6/38	////////
[94; 104)	5	5/38	/////
[104; 114)	5	5/38	/////
Сумма частот	38	1	

Для контроля правильности группирования нужно вычислить сумму частот, которая равна объему выборки.

Анализ интервального распределения позволяет сделать вывод, что основная часть учащихся (21 человек) читает со скоростью 64-94 слова в минуту. Но есть ученики (7 человек), которые читают с невысокой скоростью, а также школьники (10 человек) с высокой скоростью чтения.

4. Графическое представление эмпирических данных

Графическое представление результатов исследования позволяет проводить некоторое обобщение исходных данных. Это дает возможность исследователю [4]:

а) лучше понимать эмпирические данные и делать их более глубокий анализ по сравнению с текстом;

б) производить контроль точности первичной обработки.

Чаще всего используется три основных способа графического представления данных: полигон частот (относительных частот), гистограмма частот, точечная диаграмма.

Полигоном частот (полигоном распределения) называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \dots, (x_i; n_i)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i , а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i . Полученные точки $(x_i; n_i)$ соединяют отрезками. Полигон частот позволяет в графическом виде представить варьирование исследуемого признака [7].

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; w_1), (x_2; w_2), \dots, (x_i; w_i)$. Для построения полигона относительных частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i , а на оси ординат – соответствующие им частоты w_i . Полученные точки $(x_i; w_i)$ соединяют отрезками [7].

Пример 3. Построить полигон частот для данных из примера 1.

Решение. Воспользуемся распределением частот, полученным в примере 1.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	3	2	2	1	2	2	1
w_i	1/13	2/13	2/13	1/13	2/13	2/13	1/13

Построим точки с координатами: (1;3), (2;2), (3;2), (4;1), (5;2), (6;2), (7;1) и соединим их отрезками.

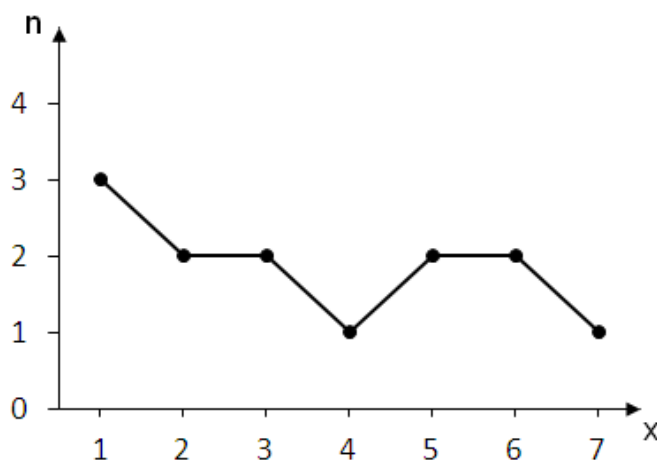


Рис. 2.2. Полигон частот, построенный на основе статистического распределения эмпирических данных

Гистограммой частот (гистограммой) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы шириной h , а высотой – частота n_i (или плотность частоты n_i / h). Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними строят прямоугольники высотой n_i (или n_i / h) [7].

Пример 4. Построить гистограмму частот для данных из примера 2.

Решение. Воспользуемся интервальным распределением, полученным в примере 2.

Границы частичных интервалов	[44; 54)	[54; 64)	[64; 74)	[74; 84)	[84; 94)	[94; 104)	[104; 114)
Частота	3	4	6	9	6	5	5

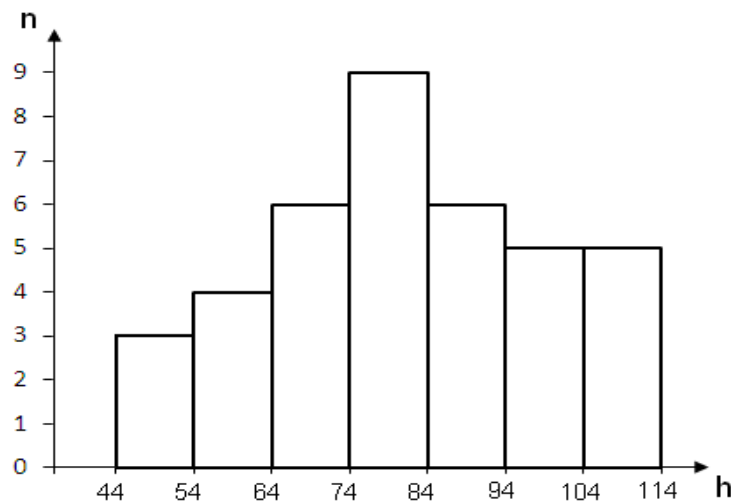


Рис. 2.3. Гистограмма частот, построенная на основе статистического распределения эмпирических данных

Точечная диаграмма – форма графического представления данных, для построения которой по оси абсцисс откладываются значения признака, а по оси ординат точками отмечается частота встречаемости каждого признака [8].

Пример 5. Построить точечную диаграмму для данных из примера 1.

Решение. Воспользуемся распределением частот, полученным в примере 1.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	3	2	2	1	2	2	1

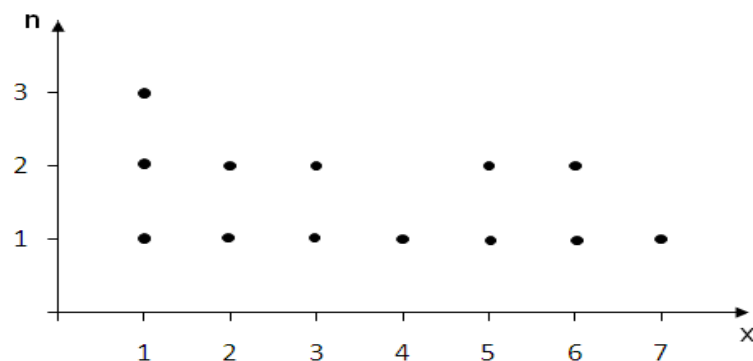


Рис. 2.4. Точечная диаграмма, построенная на основе статистического распределения эмпирических данных

Гистограмму и точечную диаграмму можно использовать для построения полигона распределения. Для этого:

а) на гистограмме отмечают середины верхних сторон прямоугольников и соединяют их отрезками, а концы «замыкают» на x_{\min} и x_{\max} ;

б) соединяют вершины состоящих из точек столбцов точечной диаграммы.

При статистической обработке данных с помощью программных пакетов (STATISTICA, SPSS и др.) для наглядного представления результатов исследования часто используют следующие виды диаграмм:

- *столбиковая диаграмма*, которая применяется для представления однородных, но не связанных между собой показателей и является прямоугольниками (столбиками), вытянутыми по вертикали, высота которых соответствует значению показателей;

- *круговая (секторная) диаграмма*, которая используется для изображения структуры некоторой совокупности и строится путем деления круга на секторы пропорционально удельному весу частей в целом. Размер каждого сектора определяется величиной угла расчета (1% соответствует $3,6^\circ$);

- *диаграмма рассеяния*, которая применяется для демонстрации наличия (отсутствия) корреляции между двумя переменными и представляет собой совокупность точек на плоскости, координатами которых являются соответствующие значения исследуемых признаков (см. пример 1 темы 8 «Корреляционный анализ»);

- *коробчатая диаграмма* (диаграмма размаха, или «ящик с усами»), которая является наглядным представлением основных характеристик совокупности эмпирических данных. Она состоит из прямоугольника, длина которого равна внутриквартильному размаху (разности третьего и первого квартилей) (см. ниже пункт 5 «Квантили и их интерпретация»). Квадратик внутри этой фигуры соответствует значению, расположенному точно в середине упорядоченной последовательности статистических данных (т.е. является медианой). Также на коробчатой диаграмме отрезками (своеобразными «усами») отмечаются максимальное и минимальное значения, которые принимает признак. Пример коробчатой диаграммы, построенной по результатам измерения некоторой переменной (PT_POOR), представлен ниже.



Рис. 2.5. Коробчатая диаграмма, построенная по результатам измерения изучаемой переменной

Выбор вида диаграммы для наглядного представления данных определяется теми задачами, которые стоят перед пользователем.

При графическом представлении данных исследователю должен руководствоваться следующими правилами:

- необходимо представлять на графике основную информацию, которая позволяет его прочесть (заголовок графика, название осей, единицы измерения, легенды);

- не стоит перегружать график лишней информацией (один график – одна идея); если необходимо представить графически несколько идей, то лучше построить несколько графиков;

- не стоит слишком дробить структуру графика, выделяя более 5-6 частей (особенно на круговой диаграмме), поскольку маленькие сектора будут практически не видны, и их лучше объединить в группы (например, «прочие»);

- для лучшего восприятия информации изображаемые на графике категории данных удобно представлять либо в алфавитном порядке, либо отсортировав их величину по убыванию;

- следует избегать использования на одном графике большого количества разных цветов; лучше применять стандартную цветовую гамму, спокойные цвета, использовать разные цвета для обозначения различных категорий, описываемых графически, и разные уровни интенсивности одного цвета для обозначения подкатегорий;

- сразу после графика целесообразно представить текстовое описание, позволяющее раскрыть его основные идеи и сделать выводы.

5. Квантили и их интерпретация

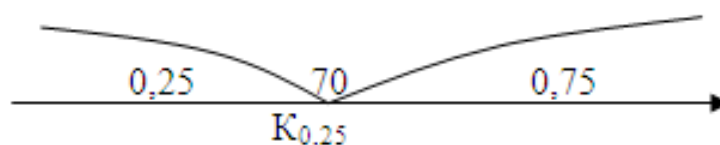
Одним из эффективных методов описания исходных данных является представление их квантилей [4; 26].

Квантиль – это точка на числовой прямой, которая делит совокупность исходных наблюдений на две части с известными пропорциями в каждой из частей. Показатель одной из пропорций при обозначении квантиля записывается в качестве индекса и называется уровнем или порядком квантиля.

В общем виде квантиль записывается следующим образом:

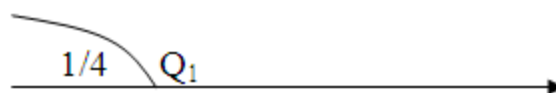
K_p (квантиль уровня p), где $0 < p < 1$.

Пример 6. По результатам эксперимента, в котором измерялась скорость чтения, было установлено, что $K_{0,25} = 70$ (квантиль уровня 0,25 равен 70). Он характеризует левую часть пропорции исходных наблюдений, показывая, что 0,25 (или 25%) участников исследования имеют скорость чтения 70 слов в минуту и меньше, или 0,75 (75%) школьников читают со скоростью 70 слов в минуту и больше.



Квантиль является общим понятием. Частными случаями квантиля являются квартиль, дециль, процентиль.

Квартиль – это точка на числовой прямой, которая делит исходную совокупность наблюдений на две части, каждая из которых пропорциональна одной или нескольким четвертым частям. Так, квартиль Q_1 показывает, что слева от него расположено $1/4$ всех исходных наблюдений.

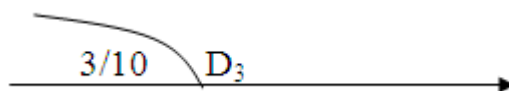


Обычно рассматривают 3 квартиля: Q_1 , Q_2 , Q_3 . Квартиль Q_4 не используют, поскольку слева от него расположены $4/4$ наблюдений, т.е. все наблюдения, и он равен x_{\max} .

Верхний квартиль Q_3 делит пополам верхнюю часть выборки, те значения переменной, которые больше медианы. Нижний квартиль Q_1 делит пополам нижнюю часть выборки, те значения переменной, которые меньше медианы. Нижний квартиль часто обозначают символом 25%, поскольку 25% значений исследуемой переменной меньше значения Q_1 . Аналогично верхний квартиль Q_3 обозначают символом 75%.

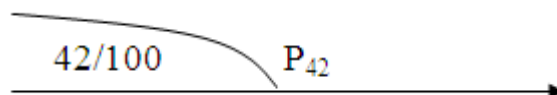
Для описания исходных данных часто используют *внутриквартильный размах*. Это интервал, равный разности верхнего и нижнего квартиля ($75\% - 25\%$) и содержащий медиану, в который попадает 50% наблюдений [21].

Дециль – это точка на числовой прямой, которая делит исходную совокупность наблюдений на две части, каждая из которых пропорциональна одной или нескольким десятым частям. Например, D_3 показывает, что слева от него расположено $3/10$ всех наблюдений.



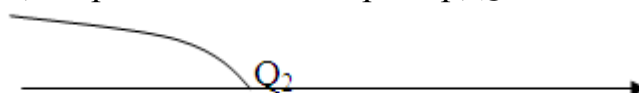
Обычно рассматривают 9 децилей: D_1 , D_2 , D_3 , ..., D_9 . D_{10} не используют, поскольку он не несет полезной информации.

Процентиль – это точка на числовой прямой, которая делит исходную совокупность наблюдений на две части, каждая из которых пропорциональна одной или нескольким сотым частям. Например, P_{42} показывает, что слева от него расположено $42/100$, или 42% исходных данных.



Обычно рассматривают 99 процентилей: P_1 , P_2 , ..., P_{98} , P_{99} .

Иногда некоторая точка на числовой оси может одновременно являться и квантилем, и децилем, и процентилем. Например, $Q_2 = D_5 = P_{50} = K_{0,5}$.



$Q_3 = P_{75} = K_{0,75}$, а вот децилем быть не может.

$P_{35} = K_{0,35}$, не является квартилем и децилем.

$K_{0,237}$, не является квартилем, децилем, процентилем.

Ниже на рисунке представлено соотношение основных квантилей.

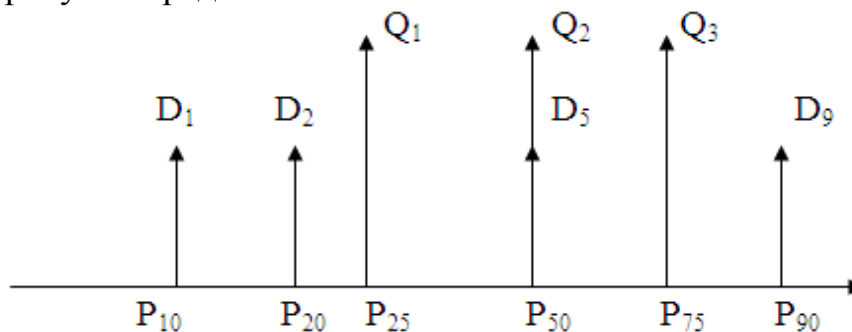


Рис. 2.6. Графическое соотношение основных квантилей, децилей и процентилей

Квантили (особенно процентиля) используются для определения частоты встречаемости определенных значений измеряемого признака или для выделения подгрупп и отдельных испытуемых, наиболее типичных или нетипичных для данного множества наблюдений [18].

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение генеральной совокупности. Приведите примеры.
2. Дайте определение выборочной совокупности. Приведите примеры.
3. Что такое объем выборки? Как он обозначается?
4. Приведите классификацию выборок в зависимости от их объема.
5. Чем руководствуется исследователь при определении необходимого объема выборки?
6. Какая выборка называется репрезентативной?
7. Что такое выборка стандартизации?
8. Перечислите основные правила формирования выборки стандартизации.
9. Перечислите основные способы случайного отбора элементов выборки. Приведите примеры.
10. Что называют вариантой и частотой варианты?
11. Дайте определения относительной частоты и накопленной частоты варианты.
12. Какими свойствами обладают частоты и относительные частоты выборки?
13. Что такое вариационный ряд?
14. Охарактеризуйте распределение частот и последовательность его построения.
15. Охарактеризуйте интервальное распределение и этапы табулирования данных.
16. Перечислите основные способы графического представления данных. Какие задачи они решают?
17. Дайте определение полигона частот и опишите последовательность его построения.
18. Дайте определение гистограммы и опишите последовательность ее построения.

19. Дайте определение точечной диаграммы и опишите последовательность ее построения.
20. Как построить полигон частот по гистограмме и точечной диаграмме?
21. Перечислите основные виды диаграмм, которые используются для наглядного представления данных с помощью программных пакетов. Чем определяется выбор вида диаграммы исследователем?
22. Какие правила должен соблюдать исследователь при графическом представлении данных?
23. Что такое квантиль? Приведите примеры квантилей.
24. Дайте определение квартиля. Приведите примеры.
25. Что такое внутриквартильный размах?
26. Дайте определение дециля. Приведите примеры.
27. Дайте определение процентиля. Приведите примеры.
28. Представьте графически отношение между основными квантилями.

Тема 3 Вычисление основных статистических показателей: описательные статистики

План:

1. Меры центральной тенденции.
2. Меры изменчивости.
3. Асимметрия и эксцесс.
4. Виды частотного распределения.

Основные понятия и термины: описательные статистики, меры центральной тенденции, мода, медиана, среднее значение, меры изменчивости, размах, дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент вариации, асимметрия, эксцесс, распределение признака, нормальное распределение, меры формы, правосторонняя асимметрия, левосторонняя асимметрия, островершинное распределение, средневершинное распределение, плосковершинное распределение, бимодальное распределение.

Для описания исходных данных, полученных по выборке, используют ряд показателей, которые позволяют охарактеризовать всю совокупность исходных данных в целом – *описательные статистики*. Рассмотрим основные из них подробнее.

1. Меры центральной тенденции

Характеристики выборки, которые показывают, где в основном расположены значения признака, называют *мерами центральной тенденции* (МЦТ). Наиболее распространенными являются следующие меры центральной тенденции: мода, медиана, среднее значение.

Мода (M_0) – это такое значение признака, которое встречается в выборке наиболее часто.

Например: в выборке 4, 2, 8, 8, 4, 8, 10 $M_0 = 8$, т.к. значение 8 встречается наиболее часто – 3 раза. Необходимо помнить, что мода представляет собой наиболее частое значение (в данном примере 8), а не частоту этого значения (в примере равную 3).

Правила для определения моды [4]:

1. Если все значения выборки встречаются одинаково часто, то принято считать, что выборка не имеет моды.

Например: а) 2, 2, 2, 3, 3, 3 – моды нет; б) 1, 2, 3, 4, 5, 6 – моды нет.

Но 2, 2, 2, 2, 2, 2 – $M_0 = 2$.

2. Если в упорядоченной выборке два смежных (соседних) значения имеют одинаковую частоту и она больше частоты любого другого значения, то мода равна среднему значению этих двух соседних величин.

Например: а) 1, 4, 3, 3, 6, 2, 8, 2, 10. Упорядочим выборку: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 6, 8, 10. Тогда $M_0 = (2 + 3) : 2 = 2,5$; б) 2, 2, 4, 4, 6, 6, 10, 12; $M_0 = (2 + 4 + 6) : 3 = 4$.

3. Если в упорядоченной выборке два несмежных значения имеют равную частоту и она больше частоты других значений, то в этом случае говорят, что выборка имеет две моды и называется *бимодальной выборкой*.

Например: а) 2, 2, 3, 4, 4, 6 $M_{01} = 2, M_{02} = 4$;

б) 2, 2, 3, 4, 4, 6, 6 $M_{01} = 2; M_{02} = (4 + 6) : 2 = 5$;

Выборка может иметь и более двух мод.

Например: 2, 4, 4, 4, 6, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10 $M_{01} = 4, M_{02} = 8, M_{03} = 10$.

Мода может быть легко определена по гистограмме или полигону частот.

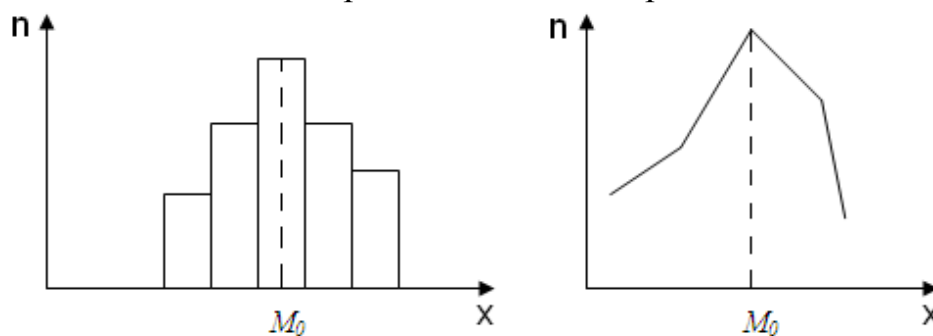


Рис. 3.1. Определение моды по гистограмме и полигону частот

Медиана (M_e) – это значение признака, которое делит упорядоченную выборку пополам, т.е. половина значений выборки меньше медианы, а вторая половина больше медианы.

Правила для вычисления медианы [4]:

1. Если количество наблюдений в выборке нечетно, то медиана равна значению, расположенному точно в середине упорядоченной выборки.

Например: 11, 13, 18, 19, 20, $M_e = 18$.

Номер элемента, расположенного в середине выборки с нечетным количеством наблюдений, определяется по формуле $i = \frac{n+1}{2}$, где n – объем выборки.

Например: а) для предыдущего случая $n = 5$, $i = (5 + 1) : 2 = 3$, $M_e = x_3 = 18$;

б) $n = 127$, $i = (127 + 1) : 2 = 64$, $M_e = x_{64}$, т.е. медианой является значение, расположенное на 64-м месте в упорядоченной выборке.

2. Если количество наблюдений в выборке четно, то медиана равна среднему значению двух величин, расположенных в середине упорядоченной выборки.

Например: 2, 3, 5, 7, 8, 10, $M_e = (5 + 7) : 2 = 6$, где n – объем выборки.

Номера двух элементов, расположенных в середине упорядоченной выборки, содержащей четное количество значений, вычисляются с помощью формул

$$i = \frac{n}{2} \text{ и } i+1 = \frac{n}{2} + 1.$$

Например: а) для предыдущего случая $n = 6$, $i = 6 : 2 = 3$, $i + 1 = 6 : 2 + 1 = 4$,

$$M_e = (x_3 + x_4) : 2 = (5 + 7) : 2 = 6;$$

б) $n = 116$, $i = 116 : 2 = 58$, $i + 1 = 116 : 2 + 1 = 59$, $M_e = (x_{58} + x_{59}) : 2$, т.е. медиана равна среднему значению величин, расположенных на 58-м и 59-м местах в упорядоченной выборке.

Медиану, в отличие от моды, по гистограмме и полигону частот вычислить трудно, так как для этого нужно разделить пополам площадь сложной фигуры.

Поскольку медиана делит упорядоченную выборку пополам, то ее можно рассматривать как различные виды квантилей: $M_e = K_{0,5} = Q_2 = D_5 = P_{50}$, т.е. медиана является квантилем с порядком 0,5, квартилем с порядком 2, децилем с порядком 5 и процентилем с порядком 50.

Среднее арифметическое значение выборки (выборочное среднее, среднее) – это сумма всех ее значений, разделенная на количество элементов выборки. Среднее значение обычно обозначается \bar{x} или $M(x)$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \text{ где } n \text{ – объем выборки.}$$

Например: 1, 3, 3, 5, 5, 9, 9. $N = 7$, $\bar{x} = (1 + 3 + 3 + 5 + 5 + 9 + 9) : 7 = 35 : 7 = 5$.

Если значения признака повторяются, то \bar{x} вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n}, \text{ где } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Для предыдущего примера:

$$\bar{x} = (1 + 3 \times 2 + 5 \times 2 + 9 \times 2) : 7 = (1 + 6 + 10 + 18) : 7 = 35 : 7 = 5.$$

Свойства среднего значения [4]:

1. Если выборка состоит из одного и того же значения, то среднее значение этой выборки будет равно этому значению.

Например: 12, 12, 12, 12, 12. $\bar{x} = (12 \times 5) : 5 = 12$.

2. Если к каждому элементу выборки добавить одну и ту же величину c (положительную или отрицательную), то среднее значение выборки изменится на эту же величину в соответствующем направлении (положительном или отрицательном): $\bar{x}' = \bar{x} + c$.

Например: 220, 221, 222, 225; $\bar{x} = 888 : 4 = 222$. Прибавим к каждому значению выборки $c = -220$, получим новую выборку: 0, 1, 2, 5. Вычислим среднее значение для этой выборки: $\bar{x}' = (0 + 1 + 2 + 5) : 4 = 8 : 4 = 2$; $\bar{x}' = \bar{x} + c = 222 + (-200) = 2$.

3. Если каждый элемент выборки умножить на одну и ту же величину c , то среднее значение выборки изменится в c раз: $\bar{x}' = c \times \bar{x}$.

Например: 0,1; 0,4; 0,5; 0,6. $\bar{x} = 1,6 : 4 = 0,4$. Умножим каждое значение выборки на $c = 10$. Получим новую выборку: 1, 4, 5, 6;

$$\bar{x}' = (1 + 4 + 5 + 6) : 4 = 16 : 4 = 4. \quad \bar{x}' = c \times \bar{x} = 10 \times 0,4 = 4.$$

4. Сумма отклонений каждого элемента выборки от среднего значения всегда равна нулю.

Например: 1, 4, 5, 6; $\bar{x} = 4$. Вычислим сумму отклонений каждого значения от \bar{x} : $(1 - 4) + (4 - 4) + (5 - 4) + (6 - 4) = -3 + 0 + 1 + 2 = 0$.

Меры центральной тенденции можно рассчитывать и по распределению частот.

Пример 1. Вычислить моду, медиану и среднее значение выборки, представленной в виде статистического распределения:

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	3	2	4	2

Решение:

1) модой является такое значение x_i , частота которого n_i максимальна: $M_0 = 7$, поскольку это значение встречается чаще всего (4 раза);

2) для определения медианы вначале выясняем, сколько значений содержит выборка: $n = 15$ – нечетное. Тогда медианой будет являться значение, расположенное в середине ряда, номер которого равен $i = (n + 1) : 2 = (15 + 1) : 2 = 8$. Начинаем последовательно суммировать частоты n_i , пока не достигнем нужного элемента: $n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 1 + 3 = 7$. Значит, следующим, восьмым, элементом будет значение выборки, равное 5. $M_e = x_8 = 5$;

3) для определения \bar{x} нужно каждое значение x_i умножить на его частоту n_i , произведения сложить и разделить на объем выборки n :

$$\bar{x} = (2 \times 3 + 3 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 7 \times 4 + 10 \times 2) : 15 = 79 : 15 = 5,26.$$

Выбор меры центральной тенденции

При обработке исходных данных желательно использовать все три меры центральной тенденции, поскольку использование одной из них может привести к не совсем достоверным выводам. Отметим некоторые особенности использования мер центральной тенденции для представления данных исследования [4].

1. В небольших выборках мода может быть совершенно нестабильной. Например: в выборке 1, 1, 1, 3, 5, 7, 7, 8 $M_0 = 1$. Изменим два элемента в выборке, при этом мода существенно изменится: 0, 1, 2, 3, 5, 7, 7; $M_0 = 7$.

2. На медиану не влияют величины самых больших и самых малых значений элементов выборки (т.е. «выбросы»).

Например: для выборки 1, 2, 5, 6, 8 – $M_e = 5$. Изменим последний элемент в 10 раз: 1, 2, 5, 6, 80. Медиана при этом не изменится – $M_e = 5$.

3. На величину среднего значения оказывает влияние каждый элемент выборки. Если какой-либо элемент выборки изменится на величину c , то среднее значение изменится в том же направлении на величину $\frac{c}{n}$:

$$\bar{x}' = \bar{x} + \frac{c}{n}, \text{ где } n - \text{объем выборки.}$$

Например: для выборки 1, 4, 5, 6 среднее значение $\bar{x} = 16 : 4 = 4$. Увеличим последнее значение на 12: 1, 4, 5, 18. Тогда $\bar{x} = 28 : 4 = 7$.

$$\bar{x}' = \bar{x} + \frac{c}{n} = 4 + 12 : 4 = 4 + 3 = 7.$$

4. Некоторые выборки вообще нельзя охарактеризовать с помощью мер центральной тенденции. Особенно это справедливо для выборок, имеющих более чем одну моду.

Так, Дж. Гласс и Дж. Стенли [4] приводят пример гистограммы, которая была построена по результатам оценок учащихся, полученных ими в тесте из 10 вопросов на сложение двузначных чисел ($n = 53$).

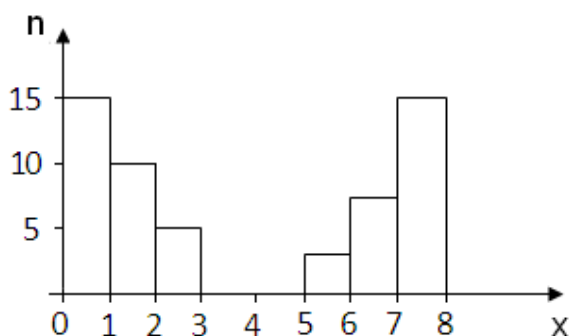


Рис. 3.2. Гистограмма распределения оценок учащихся, полученных при выполнении серии задач на сложение двузначных чисел (x – оценка в баллах)

В данном примере среднее значение $\bar{x} = 3,85$, хотя не существует ученика, получившего 4 балла. Медиана этой выборки примерно равна 2,17. В данном примере ни медиана, ни среднее значение не дают правильного представления об изучаемой выборке. Наиболее простой характеристикой для данной выборки является утверждение, что гистограмма является бимодальной и имеет U -образную форму с одной модой $M_{01} = 0$, а другой $M_{02} = 8$.

5. Если выборка является унимодальной, т.е. имеет одну моду, и гистограмма такой выборки является симметричной, то в этом случае мода, медиана и среднее значение совпадают: $M_0 \approx M_e \approx \bar{x}$.

Если гистограмма выборки является асимметричной, то соотношения между МЦТ следующие:

а) если в выборке чаще встречаются значения, меньшие чем среднее значение \bar{x} (левосторонняя асимметрия), то $M_0 < M_e < \bar{x}$;

б) если в выборке чаще встречаются значения, большие чем среднее значение \bar{x} (правосторонняя асимметрия), то $\bar{x} < M_e < M_0$.

6. Среднее значение представляет вариационный ряд, если одновременно выполняются следующие условия:

- объем выборки достаточно велик;
- гистограмма распределения симметрична;
- отсутствуют выбросы (т.е. очень большие или очень малые значения).

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то при анализе данных следует ограничиться модой и медианой.

7. Мода и медиана являются более устойчивыми характеристиками выборки, чем среднее значение.

Например, вычислим меры центральной тенденции для двух выборок, которые отличаются только одним элементом:

а) 1, 3, 3, 5, 6, 7, 8 $M_0 = 3$, $M_e = 5$, $\bar{x} = (1 + 3 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8) : 7 = 33 : 7 \approx 4,7$;

б) 1, 3, 3, 5, 6, 7, 16 $M_0 = 3$, $M_e = 2$, $\bar{x} = (1 + 3 + 3 + 5 + 6 + 7 + 16) : 7 = 41 : 7 \approx 5,9$.

Наиболее просто из мер центральной тенденции вычисляется мода. Ее легко можно найти по гистограмме или распределению частот. С точки зрения трудности вычисления медиана занимает промежуточное положение между модой и средним значением.

Таким образом, меры центральной тенденции позволяют судить о концентрации исходных данных на числовой оси, т.е. показывают, где в основном расположены значения признака.

2. Меры изменчивости

Меры изменчивости (рассеяния, разброса) – это характеристики выборки, которые показывают, насколько изменчивы значения признака, насколько они рассеяны относительно среднего. К ним относятся размах, дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент вариации [4].

Размах выборки (R) – это мера изменчивости, равная разности максимального и минимального значений выборки: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Размах – достаточно грубая мера изменчивости, т.к. для ее нахождения используются только два элемента выборки, а распределение остальных элементов не учитывается.

Например, рассмотрим две выборки, каждая из которых состоит из ста элементов:

а) $\underset{10 \text{ раз}}{1 \dots 1}, \underset{10 \text{ раз}}{2 \dots 2}, \dots, \underset{10 \text{ раз}}{10 \dots 10}$ $R_1 = 10 - 1 = 9$;

б) $\underset{98 \text{ раз}}{1, 2 \dots 2}, 10$ $R_2 = 10 - 1 = 9$.

Несмотря на то что выборки существенно различаются, размахи выборок равны.

Примечание [4]. Размах, определяемый как разность между максимальным и минимальным значениями, называется *исключающим размахом*. *Включающий размах* – это разность между естественной верхней границей интервала, содержащего максимальное значение, и естественной нижней границей интервала, включающего минимальное значение. На-

пример, рост испытуемых измеряется с точностью до ближайшего сантиметра. Получены следующие значения: 150, 155, 157, 165, 168. Фактически рост самого низкого испытуемого находится между 149,5 см и 150 см и действительная нижняя граница интервала равна 149,5 см. Соответственно, верхняя граница интервала, содержащего максимальное значение, составляет 168,5 см. Тогда включающий размах равен $168,5 - 149,5 = 19$, а исключающий размах – $168 - 150 = 18$.

Дисперсия (D) – это мера изменчивости, позволяющая учесть различия между отдельными элементами выборки. Для учета этих различий нужно рассмотреть сумму отклонений каждого элемента выборки от среднего значения:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}.$$

Но по свойству 4 среднего значения эта сумма всегда равна нулю, т.к. отклонения могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для преодоления этого недостатка каждое отклонение нужно возвести в квадрат:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^2.$$

Чтобы получить величину, характеризующую отклонение каждого отдельного элемента выборки от среднего значения, полученную сумму необходимо поделить на число элементов n . Полученная величина и есть дисперсия:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^2}{n}, \text{ где } n \geq 30.$$

Для малых выборок формула для вычисления дисперсии принимает вид:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^2}{n-1}, \text{ где } n < 30.$$

Чем больше дисперсия выборки, тем больше разбросаны исходные значения по числовой оси относительно среднего значения выборки.

Свойства дисперсии [4]:

1. Если выборка состоит из одного и того же значения, то дисперсия этой выборки будет равна нулю:

$$D = 0.$$

2. Если к каждому элементу выборки прибавить одну и ту же величину c , то дисперсия выборки не изменится:

$$D' = D.$$

3. Если каждый элемент выборки умножить на одну и ту же величину c , то дисперсия выборки изменится в c^2 раз:

$$D' = c^2 \times D;$$

4. Дисперсия выборки всегда является величиной неотрицательной:

$$D \geq 0.$$

Пример 2. Вычислить дисперсию для следующей выборки: 3, 5, 6, 9, 11, 14.

Решение. Определим объем выборки: $n = 6$.

Вычислим среднее значение выборки: $\bar{x} = (3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 14) : 6 = 48 : 6 = 8$.

Вычислим дисперсию с учетом того, что $n < 30$:

$$D = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 : (n - 1) = [(3 - 8)^2 + (5 - 8)^2 + (6 - 8)^2 + (9 - 8)^2 + (11 - 8)^2 + (14 - 8)^2] : (6 - 1) = [(-5)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 3^2 + 6^2] : 5 = (25 + 9 + 4 + 1 + 9 + 36) : 5 = 84 : 5 = 16,8.$$

Стандартное отклонение или *среднее квадратическое отклонение* (σ – *сигма*) – мера изменчивости, которая позволяет охарактеризовать разброс элементов выборки относительно среднего значения.

Стандартное отклонение тесно связано с дисперсией. Поскольку для нахождения дисперсии каждое отклонение признака от среднего значения возводили в квадрат, то для получения величины, сопоставимой со средним значением, необходимо из дисперсии извлечь квадратный корень. Полученную величину и называли средним квадратическим, или стандартным, отклонением: $\sigma = \sqrt{D}$.

$$\text{Если } n \geq 30, \text{ то } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}}{n}}^2; \text{ если } n < 30, \text{ то } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}}{n-1}}^2.$$

$$\text{Если значения признака повторяются, то } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \times n_i}{n-1}}^2.$$

Пример 3. Вычислить стандартное отклонение для выборки из примера 2: 3, 5, 6, 9, 11, 14.

Решение: $\sigma = \sqrt{D}$. В примере 2 дисперсия равна 16,8. Тогда $\sigma = \sqrt{16,8} \approx 4,1$.

Дисперсию и стандартное отклонение можно легко рассчитать по статистическому распределению выборки.

Пример 4. Вычислить дисперсию и стандартное отклонение выборки по распределению частот:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Решение.

Определим объем выборки: $n = 20 + 15 + 10 + 5 = 50$.

Вычислим среднее значение: $\bar{x} = (1 \times 20 + 2 \times 15 + 3 \times 10 + 4 \times 5) : 50 = (20 + 30 + 30 + 20) : 50 = 100 : 50 = 2$.

Вычислим дисперсию для выборки объемом $n > 30$:

$$D = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \times n_i \right] : n = [(1 - 2)^2 \times 20 + (2 - 2)^2 \times 15 + (3 - 2)^2 \times 10 + (4 - 2)^2 \times 5] : 50 = [(-1)^2 \times 20 + (0)^2 \times 15 + 1^2 \times 10 + 2^2 \times 5] : 50 = (20 + 0 + 10 + 20) : 50 = 50 : 50 = 1.$$

Вычислим стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1.$$

Небольшая величина стандартного отклонения говорит об однородности выборки, т.е. среднее значение является типичным значением для вариационного ряда. При очень большом стандартном отклонении среднее значение в мень-

шей степени характеризует вариационный ряд, что говорит о значительной вариабельности признака или неоднородности исследуемой группы.

Коэффициент вариации (v) – мера изменчивости, которая позволяет оценить степень рассеяния вариант около среднего значения.

Коэффициент вариации вычисляется по формуле

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% .$$

Если $v < 10\%$, это говорит о малом рассеянии вариант вокруг среднего значения;

если $10\% < v < 20\%$, то можно говорить о среднем рассеянии вариант;

если $v > 20\%$, то рассеяние вариант вокруг среднего является сильным и среднее не является типичным значением вариационного ряда [12].

Пример 5. Определить коэффициент вариации по данным примера 4.

Решение. Для предыдущего примера $\bar{x} = 2$, $\sigma = 1$.

Тогда $v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = 1 : 2 \times 100\% = 0,5 \times 100\% = 50\%$ – сильное рассеяние вариант около среднего значения.

3. Асимметрия и эксцесс

Существуют характеристики выборки, которые показывают, наблюдаются ли в ней преимущественные значения признака. Они также определяют форму графического представления данных и называются *мерами формы*. К мерам формы относятся асимметрия и эксцесс.

Асимметрией (A) называют степень отклонения графического представления данных (гистограммы или полигона частот) от симметричного вида относительно среднего значения [18]. Для вычисления асимметрии используется формула

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}}{n \times \sigma^3} ,$$

где n – объем выборки, σ – стандартное отклонение, \bar{x} – среднее значение.

Асимметрия показывает, какие значения преобладают в выборке: больше среднего значения или меньше его.

Свойства асимметрии [18]:

1) если $A > 0$, то говорят о *положительной (левосторонней) асимметрии*, т.е. в выборке чаще встречаются значения меньше среднего значения;

2) если $A < 0$, то говорят об *отрицательной (правосторонней) асимметрии*, т.е. в выборке чаще встречаются значения больше среднего значения;

3) если $A = 0$, то это означает, что исходная выборка (ее гистограмма) является симметричной относительно прямой $x = \bar{x}$.

На практике полностью симметричные гистограммы или полигоны частот встречаются довольно редко.

Эксцесс (E) – это мера плосковершинности или остроконечности графического представления данных (гистограммы или полигона частот) [18].

Для вычисления эксцесса используется формула

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n \times \sigma^4} - 3,$$

где n – объем выборки, σ – стандартное отклонение, \bar{x} – среднее значение.

Эксцесс позволяет определить, насколько кучно основная масса данных группируется вокруг среднего значения.

Свойства эксцесса [18]:

- 1) если $E > 0$, то говорят, что исходные данные соответствуют *островершинному распределению*, т.е. кучно расположены вокруг среднего значения;
- 2) если $-3 < E < 0$, то говорят, что исходные данные соответствуют *плосковершинному распределению*, т.е. рассеяны относительно среднего значения;
- 3) если $E = 0$, то говорят, что исходные данные соответствуют *средневершинному распределению*.

Пример 6. По данным примера 4 вычислить асимметрию и эксцесс:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Решение. В результате расчетов было установлено, что $n = 50$, $\bar{x} = 2$, $\sigma = 1$.

Воспользуемся формулой для вычисления асимметрии:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 : (n \times \sigma^3) = [(1-2)^3 \times 20 + (2-2)^3 \times 15 + (3-2)^3 \times 10 + (4-2)^3 \times 5] : (50 \times 1^3) = \\ &= [(-1)^3 \times 20 + (0)^3 \times 15 + 1^3 \times 10 + 2^3 \times 5] : 50 = (-20 + 0 + 10 + 40) : 50 = 30 : 50 = 0,6 - \text{левосторонняя асимметрия.} \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой для вычисления эксцесса:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / (n \times \sigma^4) - 3 = [(1-2)^4 \times 20 + (2-2)^4 \times 15 + (3-2)^4 \times 10 + (4-2)^4 \times 5] : \\ &: (50 \times 1^4) - 3 = [(-1)^4 \times 20 + (0)^4 \times 15 + 1^4 \times 10 + 2^4 \times 5] : 50 - 3 = (20 + 0 + 10 + 80) : 50 - 3 = \\ &= 110 : 50 - 3 = 2,2 - 3 = -0,8 - \text{данные соответствуют плосковершинному распределению.} \end{aligned}$$

Выбор числовых характеристик для описания выборки зависит от того, в какой шкале проведено измерение признака. Для данных, представленных в номинальной шкале, подходящей мерой является мода. Данные, измеренные в ранговой шкале, можно описать с помощью медианы и внутриквартильного размаха. Количественные данные можно представить с помощью среднего значения и стандартного отклонения [18].

4. Распределение признака и его виды

Распределением признака называется закономерность встречаемости его различных значений. Для его описания используются параметры распределения.

Параметры распределения – это числовые характеристики, представляющие распределение. Одни из них – меры центральной тенденции – указывают, где в основном расположены значения признака; другие – меры разброса – насколько значения признака изменчивы; третьи – меры формы – наблюдается ли преимущественное появление определенных значений признака.

В психологии чаще всего ссылаются на *нормальное (гауссово) распределение*. Оно характеризуется тем, что крайние значения признака встречаются достаточно редко, а средние – достаточно часто. График нормального распределения представляет собой колоколообразную средневершинную кривую, симметричную относительно прямой $x = \bar{x}$.

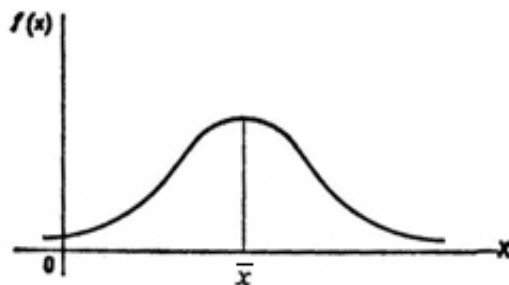


Рис. 3.3. График нормального распределения

Нормальное распределение характеризуется следующими параметрами:

- 1) мода, медиана и среднее значение выборки совпадают: $M_0 \approx M_e \approx \bar{x}$;
- 2) дисперсия и стандартное отклонение невелики;
- 3) асимметрия и эксцесс равны нулю.

Если асимметрия отлична от нуля, то распределение признака является асимметричным. Графически асимметричные распределения можно представить следующим образом [18, с. 47]:

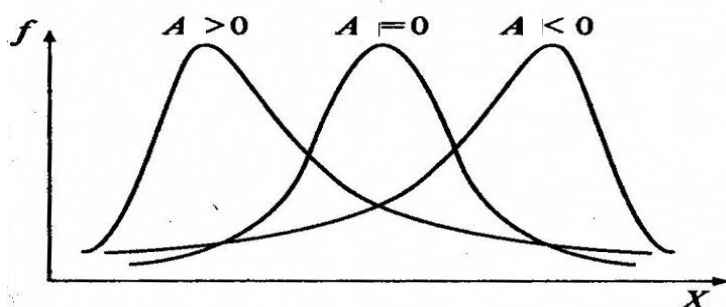


Рис. 3.4. Графики распределения частот с различными значениями асимметрии

Распределения признаков с различными эксцессами графически выглядят следующим образом [18, с. 47].

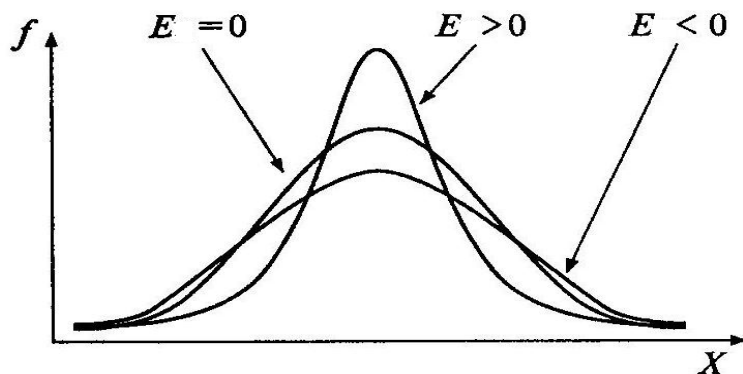


Рис. 3.5. Графики распределения частот с различными значениями эксцесса

Распределение, имеющее две моды, называется *бимодальным распределением*. График бимодального распределения имеет следующий вид [13]:

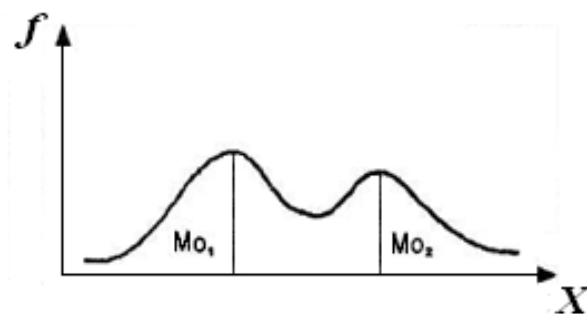


Рис. 3.6. График бимодального распределения частот

Таким образом, распределение признака позволяет в графическом виде представить вариативность этого признака.

Расчет необходимых описательных статистик и графическое представление эмпирических данных удобно производить с помощью одного из универсальных статистических пакетов (SPSS, STATISTICA, STADIA). Подробный алгоритм вычислений представлен в учебном пособии О.Ю. Ермолаева-Томина [10, с. 65–80].

Вопросы для самоконтроля:

1. *Что такое меры центральной тенденции? Какие характеристики выборки к ним относятся?*
2. *Дайте определение моды. Сформулируйте правила для вычисления моды.*
3. *Какая выборка называется бимодальной? Приведите примеры.*
4. *Дайте определение медианы. Сформулируйте правила для вычисления медианы.*
5. *Дайте определение среднего значения выборки.*
6. *Сформулируйте свойства среднего значения выборки.*
7. *Как рассчитать МЦТ по распределению частот?*
8. *Что такое меры изменчивости? Какие характеристики выборки к ним относятся?*
9. *Дайте определение размаха. Приведите примеры.*
10. *Что такое дисперсия? Сформулируйте свойства дисперсии.*
11. *Что такое стандартное отклонение?*
12. *Дайте определение коэффициента вариации. Что он характеризует?*
13. *Что такое асимметрия? Сформулируйте свойства асимметрии.*
14. *Что такое эксцесс? Сформулируйте свойства эксцесса.*
15. *Дайте определение распределения признака.*
16. *Что такое параметры распределения? Перечислите основные параметры распределения.*
17. *Охарактеризуйте нормальное распределение.*
18. *Представьте графически распределение признака в случае $A > 0$; $A < 0$.*
19. *Представьте графически распределения признака в случае $E > 0$; $E < 0$.*

Тема 4 Вычисление основных статистических показателей: случайные величины

План:

1. Событие. Виды событий.
2. Вероятность и относительная частота события.
3. Комбинаторика и вероятность.
4. Алгебра вероятностей.
5. Полная вероятность. Формулы Байеса.
6. Случайные величины. Распределение случайных величин.
7. Математическое ожидание случайной величины.
8. Дисперсия случайной величины.

Основные понятия и термины: теория вероятностей, испытание, событие, достоверное событие, невозможное событие, случайное событие, совместные события, несовместные события, противоположные события, равновозможные события, элементарное событие, благоприятный шанс, полная группа событий, вероятность события, относительная частота события, комбинаторика, перестановки, размещения, сочетания, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина, функция распределения случайной величины, математическое ожидание случайной величины, дисперсия случайной величины.

1. Событие. Виды событий

При изучении массовых явлений в науке, в том числе психологической, активно используется математический аппарат теории вероятностей.

Теория вероятностей – раздел математики, в котором по данным вероятностям одних случайных событий находят вероятности других случайных событий, каким-либо образом связанных с первыми.

Основная задача теории вероятностей – выяснение закономерностей, возникающих при взаимодействии большого числа случайных факторов. Закономерности, которые устанавливаются в результате психологических исследований, являются таковыми.

Основными понятиями теории вероятностей являются «испытание» и «событие» [5].

Испытание (опыт) – это совокупность условий или действий, при которых происходит соответствующее явление.

Событие – это результат испытания. Например: а) стрельба по мишени – испытание, попадание или промах – событие; б) подбрасывание монеты – испытание, выпадение цифры или герба – событие; в) контрольная работа – испытание, получение оценки за работу – событие.

Все наблюдаемые события можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные [5].

Достоверным (U) в данном испытании называют событие, которое обязательно произойдет в данном испытании, т.е. при совокупности определенных

условий. Например, если в ящике лежат только голубые шары, то событие «из ящика извлечен голубой шар» является достоверным. Событие «после зимы придет весна» – достоверное.

Невозможным (V) в данном испытании называют событие, которое не может произойти в данном испытании. Например, если в ящике лежат только красные шары, то событие «из ящика извлечен голубой шар» является невозможным. Событие «после зимы придет осень» – невозможное.

Случайным ($A, B, C \dots$) в данном испытании называют событие, которое может произойти, а может и не произойти в данном испытании. Например, если в ящике находятся голубые и красные шары, то события «из ящика извлечен голубой шар» или «из ящика извлечен красный шар» являются случайными.

Таким образом, одно и то же событие («из ящика извлечен голубой шар») при разных условиях может быть достоверным, невозможным, случайным.

Чаще всего наблюдаемые нами события являются случайными. Случайные события бывают совместными, несовместными и противоположными [5].

Два события называются *совместными* в данном испытании, если появление одного из них не исключает появления другого. Например, при подбрасывании двух симметричных монет событие A «герб на верхней стороне первой монеты» не исключает появления события B «цифра на верхней стороне второй монеты».

Два события называются *несовместными*, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании. Например, событие A «попадание при одном выстреле» и событие B «промах при одном выстреле» являются несовместными.

Несколько событий называются несовместными, если они попарно несовместны.

Два события называются *противоположными*, если появление одного из них равносильно неоявлению другого. Например, событие A «появление герба» и событие \bar{A} («не A ») «появление цифры» при одном подбрасывании симметричной монеты являются противоположными.

События считают *равновозможными*, если нет оснований полагать, что одно из них является более возможным, чем другие. Например, при подбрасывании монеты событие A «появление цифры» и событие B «появление герба» равновозможны, т.к. предполагается, что форма и структура монеты не влияют на то, какая сторона монеты окажется верхней.

Каждое событие, которое может наступить в результате опыта, называется *элементарным* событием. Например, попадание или промах при выстреле – элементарные события; при подбрасывании игрального кубика события A_1, A_2, \dots, A_6 – выпала грань с 1 очком, 2 очками, \dots , с 6 очками – элементарные события.

Те элементарные события, при которых интересующее нас событие происходит, называются *благоприятствующими* этому событию, или *благоприятными шансами*. Например, при подбрасывании игрального кубика элементарные

исходы A_2, A_4, A_6 являются благоприятствующими событию B «выпало четное число очков».

Множество событий A_1, A_2, \dots, A_n называют *полной группой событий*, если в результате данного испытания произойдет хотя бы одно из них, т.е. если выполняется два условия: они попарно несовместны, и появление одного и только одного из них является достоверным событием. Например, при подбрасывании игрального кубика события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ образуют полную группу.

Над событиями можно производить различные действия, получая при этом другие события [5].

1. *Суммой (объединением) событий A и B* называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них. Сумма событий обозначается $A + B$ или $A \cup B$.

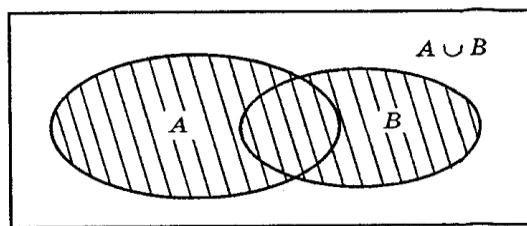


Рис. 4.1. Объединение событий A и B

Например, подбрасывается игральный кубик. Событие A – «выпало число очков, больше четырех», $A = \{A_5; A_6\}$; событие B – «выпало четное число очков», $B = \{A_2; A_4; A_6\}$. Тогда событие $A + B = \{A_2; A_4; A_5; A_6\}$.

2. *Суммой (объединением) n событий A_1, A_2, \dots, A_n* называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них. Сумму n событий обозначают $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$ или $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

3. *Произведением (пересечением) событий A и B* называется событие, состоящее в совместном наступлении обоих событий. Произведение событий обозначается $A \times B$ или $A \cap B$.

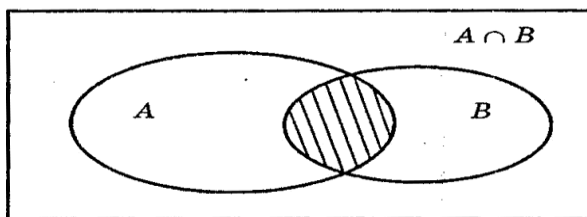


Рис. 4.2. Пересечение событий A и B

Например, подбрасывается игральный кубик. Событие A – «выпало число очков, больше четырех», $A = \{A_5; A_6\}$; событие B – «выпало четное число очков», $B = \{A_2; A_4; A_6\}$. Тогда событие $A \times B = \{A_6\}$.

4. *Произведением n событий A_1, A_2, \dots, A_n* называется событие, состоящее в совместном наступлении всех событий. Произведение n событий обозначают $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ или $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$.

5. Разностью двух событий A и B называется событие, состоящее в том, что наступило событие A и не наступило событие B . Разность событий обозначается $A - B$ или $A \setminus B$.

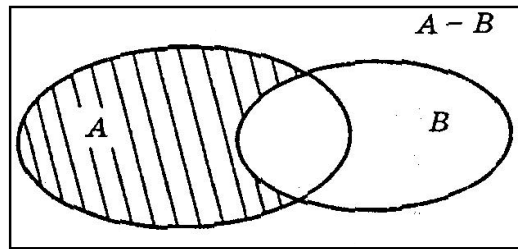


Рис. 4.3. Разность событий A и B

Например, подбрасывается игральный кубик. Событие A – «выпало число очков, больше четырех», $A = \{A_5; A_6\}$; событие B – «выпало четное число очков», $B = \{A_2; A_4; A_6\}$. Тогда событие $A - B = \{A_5\}$.

6. Событие A влечет событие B (A вложено в B), если B наступает всегда, когда наступает A . Говорят, что B является следствием A или что A – частный случай B , и пишут $A \subset B$.

Например, подбрасывается игральный кубик. Событие A – «выпало шесть очков», $A = \{A_6\}$; событие B – «выпало четное число очков», $B = \{A_2; A_4; A_6\}$. Тогда событие A влечет за собой событие B .

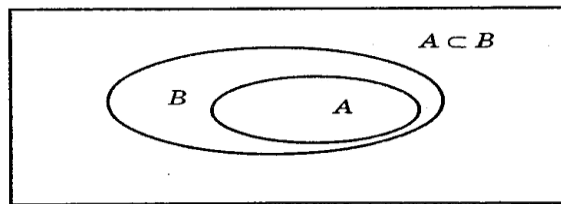


Рис. 4.4 Событие A влечет событие B

7. Если событие A влечет событие B ($A \subset B$), а событие B влечет событие A ($B \subset A$), то события A и B называют *равносильными*, или *эквивалентными*, и пишут $A = B$. Равносильность событий означает, что в данном опыте они могут появиться или не появиться вместе.

Например, подбрасывается игральный кубик. Событие A – «выпали два, четыре и шесть очков», $A = \{A_2; A_4; A_6\}$; событие B – «выпало четное число очков», $B = \{A_2; A_4; A_6\}$. Тогда события A и B равносильны: $A = B$.

8. Событие, состоящее в том, что событие A не происходит, называется *противоположным событию A* и обозначается \bar{A} .

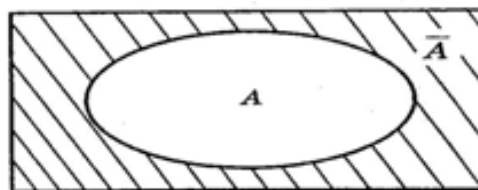


Рис. 4.5. Противоположные события

Например, подбрасывается игральный кубик. Событие A – «выпало нечетное число очков», $A = \{A_1; A_3; A_5\}$. Тогда противоположное событие – «выпало четное число очков», $\bar{A} = \{A_2; A_4; A_6\}$.

2. Вероятность и относительная частота события

Вероятность – одно из основных понятий теории вероятностей. Обозначается P (от франц. *probabilite* – вероятность). Существует несколько определений этого понятия, каждое из которых имеет ограниченную область применения. Мы будем использовать классическое и статистическое определения вероятности.

Вероятностью события A называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу всех равновозможных исходов испытания, в котором может появиться это событие:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A ; n – число всех равновозможных исходов опыта, образующих полную группу событий.

Это классическое определение вероятности [5].

Пример 1 [5]. В урне находится 6 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 2 красных, 3 синих и 1 белый. Какова вероятность того, что извлеченный из урны шар окажется красным?

Решение. Событие «извлеченный шар оказался красным» обозначим A . Данное испытание имеет 6 равновозможных элементарных исходов (n), из которых 2 (m) благоприятствуют событию A . Тогда

$$P(A) = m / n = 2/6 = 1/3.$$

Свойства вероятности события [5]:

1) вероятность достоверного события равна единице, поскольку для него выполняется равенство $m = n$:

$$P(U) = 1;$$

2) вероятность невозможного события равна нулю, поскольку для него $m = 0$:

$$P(V) = 0;$$

3) вероятность случайного события выражается положительным числом, меньшим единицы. Поскольку для случайного события A выполняются неравенства

$$0 < m < n, \text{ или } 0 < m/n < 1, \text{ то}$$

$$0 < P(A) < 1;$$

4) вероятность любого события B выражается неотрицательным числом, меньшим либо равным единице. Это следует из свойств 1–3:

$$0 \leq P(B) \leq 1.$$

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны и их число конечно. На практике такая ситуация встре-

чается редко. В связи с этим в теории вероятностей было введено понятие статистической вероятности, которое базируется на определении относительной частоты события.

Относительной частотой события, или *частотой* события A , называют отношение числа испытаний, в которых появилось это событие, к числу всех проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число испытаний, в которых появилось событие A ; n – число всех произведенных испытаний [5].

Относительная частота события обладает следующими *свойствами* [5]:

1) частота достоверного события U равна единице:

$$W(U) = 1;$$

2) частота невозможного события V равна нулю:

$$W(V) = 0;$$

3) частота случайного события A есть число, заключенное между нулем и единицей:

$$0 < W(A) < 1;$$

4) частота суммы двух несовместных событий A и B равна сумме частот этих событий:

$$W(A + B) = W(A) + W(B).$$

Пример 2 [5]. Из 500 взятых наудачу деталей 8 оказались бракованными. Найти частоту бракованных деталей.

Решение. Пусть событие A «взята бракованная деталь». Число испытаний, в которых появилось событие A , $m = 8$; число всех произведенных испытаний $n = 500$.

Тогда $W(A) = m / n = 8 / 500 = 0,016$.

Статистической вероятностью называется число, около которого группируются значения частоты данного события при проведении большого числа испытаний [5].

Например, по данным шведской статистики, относительная частота рождения девочек за 1935 г. по месяцам (с января по декабрь) характеризуется следующими числами: 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473. Относительная частота колеблется около числа 0,482, которое можно принять за приближенное значение вероятности рождения девочек. Отметим, что статистические данные различных стран дают примерно такое же значение относительной частоты [7].

Сопоставляя определения классической вероятности и относительной частоты, можно сделать вывод, что вероятность вычисляют *до* проведения испытания, а относительную частоту – *после* проведения.

При многократных испытаниях относительная частота события незначительно отличается от его вероятности. Например, для события A «рождение де-

вочки» вероятность рассчитывается так: $P(A) = 1/2 = 0,5$ ($n = 2$ (мальчик или девочка), $m = 1$ (девочка)). Относительная частота этого события, полученная в предыдущем примере, равна 0,482.

Недостатком статистического определения вероятности является его неоднозначность. Так, в качестве вероятности события A «рождение девочки» можно принять не только 0,482, но и 0,481, или 0,483.

3. Комбинаторика и вероятность

Комбинаторика – раздел математики, который изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используют при непосредственном вычислении вероятностей [5].

Пусть дано множество из n элементов, все элементы различны.

Перестановками из n элементов называются *множества элементов*, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только порядком. Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают (P_n) и вычисляют по формуле

$$P_n = n!$$

Пример 3 [5]. Сколько трехзначных чисел можно составить из трех цифр 1, 2, 3, если цифры не повторяются?

Решение. По условию $n = 3$. Воспользуемся формулой для определения числа перестановок:

$$P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \text{ – шесть трехзначных чисел.}$$

Размещениями называются множества, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всевозможных размещений определяется формулой

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 4 [5]. Сколько двузначных чисел можно составить из трех цифр 1, 2, 3, если цифры не повторяются?

Решение. По условию $n = 3$, $k = 2$. Воспользуемся формулой для определения числа размещений:

$$A_3^2 = 3! / (3 - 2)! = 1 \times 2 \times 3 / 1 = 6 / 1 = 6 \text{ – шесть двузначных чисел.}$$

Сочетаниями называются множества, составленные из n различных элементов по k элементов, которые отличаются только составом элементов. Число всевозможных сочетаний определяется формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 5 [5]. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. По условию $n = 10$, $k = 2$. Воспользуемся формулой для определения числа сочетаний:

$$C_{10}^2 = 10! / 2! \times (10 - 2)! = 10! / 2! \times 8! = 9 \times 10 / 1 \times 2 = 90 / 2 = 45.$$

Полезно знать, что существуют формулы, связывающие сочетания, размещения и перестановки:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n}, \quad \text{или} \quad A_n^k = P_n \times C_n^k.$$

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае число комбинаций с повторениями вычисляется по другим формулам.

Пусть среди n элементов некоторые повторяются: n_1 – элементы одного вида, n_2 – элементы второго вида, ..., n_k – элементы k -того вида, где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Число перестановок с повторениями вычисляются по следующей формуле:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

Число размещений с повторениями и сочетаний с повторениями вычисляется по следующим формулам:

$$(A_n^k)_{\text{с повт}} = n^k \quad \text{и} \quad (C_n^k)_{\text{с повт}} = C_{n+k-1}^k.$$

Пример 6 [5]. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках Л, на остальных трех И. Выкладывают эти карточки наудачу в ряд. Какова вероятность того, что получится слово ЛИЛИИ?

Решение. Пусть событие A – «появление слова ЛИЛИИ». Для нахождения вероятности события необходимо найти число равновозможных исходов и исходов, благоприятствующих событию A .

Определим число равновозможных исходов n . Используется пять из пяти элементов, которые повторяются. Воспользуемся формулой для перестановок с повторениями, $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$.

$$P_5(2, 3) = 5! / 2! \times 3! = (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) / (1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3) = 120 / 12 = 10.$$

Событию A «появление слова ЛИЛИИ» благоприятствует один: $m = 1$.

Следовательно, $P(A) = m / n = 1 / 10 = 0,1$.

При решении задач комбинаторики используются два правила [5].

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов n способами, а другой объект B может быть выбран k способами, то выбрать либо A , либо B можно $n + k$ способами.

Правило произведения. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов n способами, и после каждого такого выбора объект B может быть выбран k способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $n \times k$ способами.

Пример 7 [5]. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей окажется 4 стандартных.

Решение. Общее число равновозможных событий испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 (C_{10}^6).

Определим число исходов, благоприятствующих событию A «среди 6 взятых деталей 4 стандартных». Из имеющихся 7 стандартных деталей 4 стандартных можно взять C_7^4 способами. При этом остальные 2 детали ($6 - 4$) должны быть нестандартными. Взять же 2 нестандартные детали из 3 нестандартных ($10 - 7$) можно C_3^2 способами. Следовательно, по комбинаторному правилу умножения число благоприятных шансов равно $C_7^4 \times C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех равновозможных исходов:

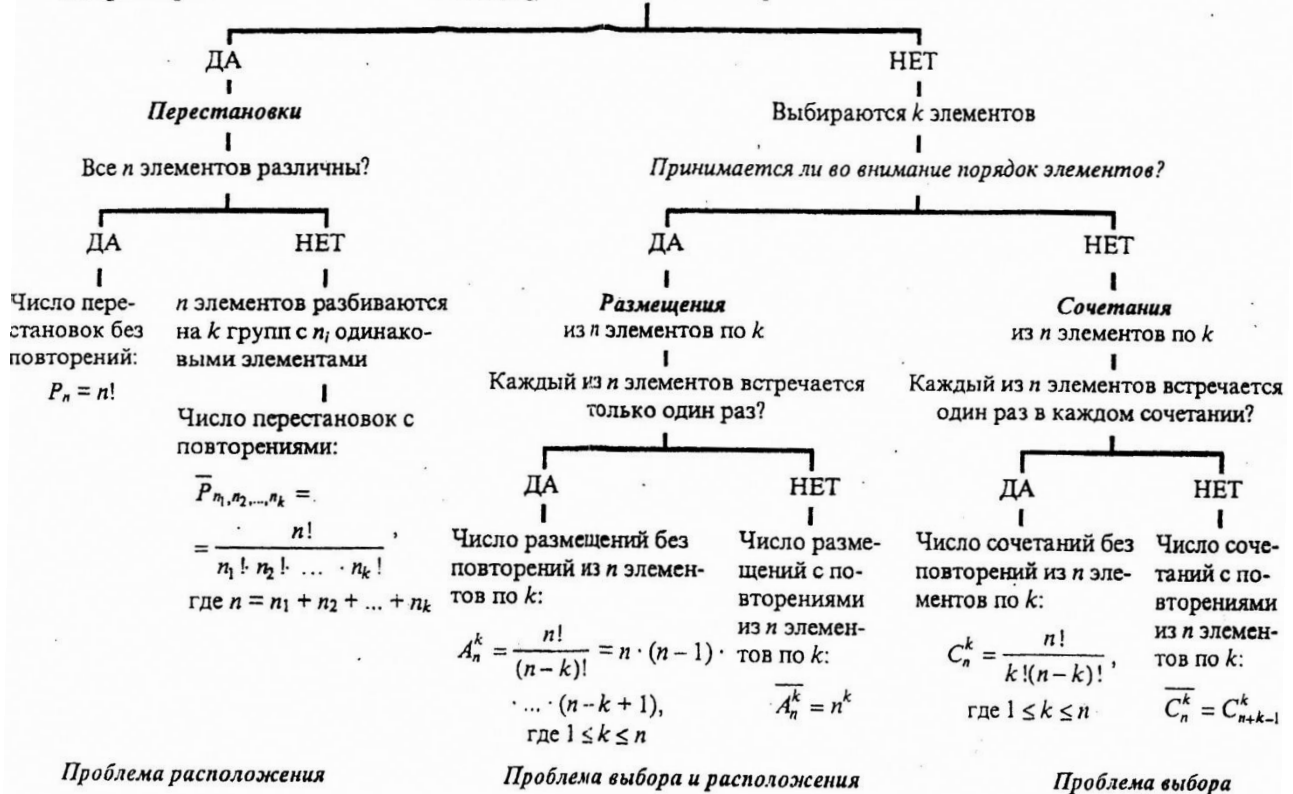
$$P(A) = m / n = (C_7^4 \times C_3^2) : C_{10}^6 = ([7! / 4! \times 3!] \times [3! / 2! \times 1!]) : [10! / 6! \times 4!] = [7! \times 6! \times 4! \times 3!] : [10! \times 4! \times 3! \times 2!] = 5 : 10 = 0,5.$$

При выборе необходимой формулы для решения задач комбинаторики удобно пользоваться следующим алгоритмом [23]:

АЛГОРИТМ

выбора формулы для подсчета числа элементов в конечном множестве

Дано: n элементов.
Определить: число возможных наборов из всех или нескольких элементов.
Алгоритм решения: все n элементов содержатся в каждом наборе?



4. Алгебра вероятностей

Для понимания закономерности вариации случайной величины важны теоремы сложения и умножения вероятностей. Рассмотрим их [5].

1. Теорема сложения вероятностей двух событий.

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

2. Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

3. Теорема сложения вероятностей n несовместных событий.

Вероятность суммы n несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Следствие 1. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, \dots, A_n , образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий A и \bar{A} равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Вероятность события B (при условии, что произошло событие A), называется *условной вероятностью* события B . Она обозначается $P(B/A)$.

Например, в урне находится 6 шаров, 3 из которых – красные. Событие A – «первый извлеченный шар – красный», событие B – «второй извлеченный шар – красный». Тогда $P(A) = 3 / 6$, а $P(B/A) = 2/5$.

4. Теорема умножения вероятностей двух событий.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \times P(B/A) \text{ или } P(AB) = P(B) \times P(A/B).$$

5. Теорема умножения вероятностей n событий.

Вероятность произведения n событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленные в предположении, что все предыдущие события наступили:

$$P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \times A_2) \times \dots \times P(A_n / A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}).$$

Событие B не зависит от события A (события A и B независимы), если $P(B/A) = P(B)$, т.е. вероятность события B не зависит от того, произошло ли событие A . В этом случае и событие A не зависит от B .

6. Теорема умножения вероятностей двух независимых событий.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \times P(B).$$

События A_1, A_2, \dots, A_n называются *независимыми (независимыми в совокупности)*, если независимы каждые два из них, а также независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности.

7. Теорема умножения вероятностей n независимых событий.

Если события A_1, A_2, \dots, A_n независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \dots \times P(A_n).$$

Пример 8 [5]. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попал хотя бы один спортсмен.

Решение. Пусть событие A – «в мишень попал первый спортсмен», событие B – «в мишень попал второй спортсмен». Тогда событие $A + B$ – «в мишень попал хотя бы один спортсмен (первый или второй)». События A и B совместны. Воспользуемся теоремой 1.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

События A и B независимы. Тогда по теореме 6 имеем: $P(AB) = P(A) \times P(B)$.

Подставив данные в формулу $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$, получим:

$$P(A + B) = 0,85 + 0,8 - 0,85 \times 0,8 = 1,65 - 0,68 = 0,97.$$

Пример 9 [5]. В урне находится 8 красных и 6 голубых шаров. Последовательно без возвращения из урны извлекаются три шара. Найти вероятность того, что все три извлеченных шара голубые.

Решение. Пусть событие A_1 – «первый извлеченный шар голубой», A_2 – «второй извлеченный шар голубой», A_3 – «третий извлеченный шар голубой», событие A – «все три извлеченных шара голубые». Тогда $A = A_1 \times A_2 \times A_3$, события A_1, A_2, A_3 – зависимы.

Воспользуемся теоремой 5:

$$P(A) = P(A_1 \times A_2 \times A_3) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \times A_2) = 6/14 \times 5/13 \times 4/12 = 5/91 \approx 0,055.$$

5. Полная вероятность. Формулы Байеса

Следствием теорем суммы и произведения событий является формула полной вероятности [5].

Пусть H_1, H_2, \dots, H_n – n попарно несовместных событий, для которых известны их вероятности $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, отличные от нуля ($P(H_i) \neq 0$). Событие A влечет их сумму ($A \subset H_1 + H_2 + \dots + H_n$), причем известны условные вероятности $P(A/H_i)$. Тогда вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = P(H_1) \times P(A/H_1) + P(H_2) \times P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \times P(A/H_n),$$

$$\text{или } P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \times P(A/H_i).$$

Эту формулу называют *формулой полной вероятности*, а события H_1, H_2, \dots, H_n – гипотезами.

Пример 10 [5]. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 30%, вторая – 45%, третья – 25% всех изделий. Брак в их продукции составляет 2%, 1% и 3% соответственно. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт окажется дефектным.

Решение. Пусть событие A – «случайно выбранный болт – дефектный», H_1, H_2, H_3 – события, состоящие в том, что болт произведен соответственно первой, второй, третьей машиной.

Из условия задачи следует, что $P(H_1) = 0,30$, $P(H_2) = 0,45$, $P(H_3) = 0,25$, а также $P(A/H_1) = 0,02$; $P(A/H_2) = 0,01$; $P(A/H_3) = 0,03$.

Тогда по формуле полной вероятности при $n = 3$ получаем

$$P(A) = P(H_1) \times P(A/H_1) + P(H_2) \times P(A/H_2) + P(H_3) \times P(A/H_3) = \\ = 0,30 \times 0,02 + 0,45 \times 0,01 + 0,25 \times 0,03 = 0,006 + 0,0045 + 0,0075 = 0,018.$$

Решение задач на нахождение произвольной вероятности возможно аналитическим способом, т.е. с помощью формулы полной вероятности, а также графически, с применением дерева вероятностей.

Правила построения дерева вероятностей [16]:

1. Дерево вероятностей должно учитывать все возможные исходы.

2. Вершины дерева соответствуют испытаниям (кроме конечных) и обозначаются точками.
3. Ребра дерева соответствуют событиям.
4. Концевыми вершинами обозначаются вероятности; к каждой из вероятностей ведет путь от начальной точки, состоящий из 2-х ребер дерева.
5. Для нахождения каждой из вероятностей p_1, p_2, p_3, \dots перемножаются вероятности ребер соответствующего пути.
6. Искомая вероятность вычисляется как сумма вероятностей, удовлетворяющих условию задачи.
7. Поскольку сумма всех возможных исходов – это достоверное событие, то сумма всех вероятностей всегда равна 1.

Построим дерево вероятностей для данных предыдущего примера:

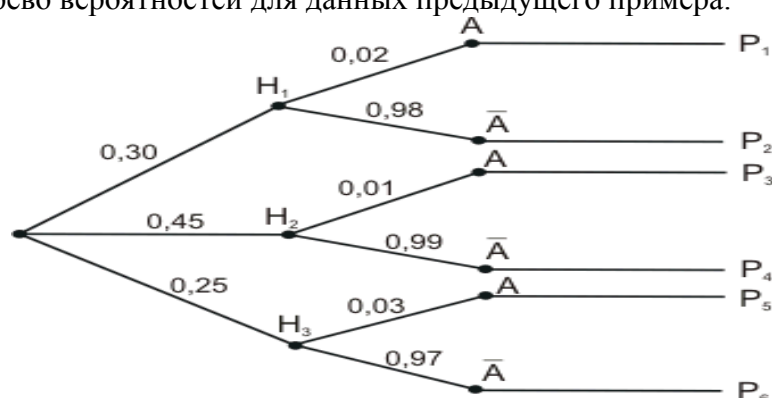


Рис. 4.6. Дерево вероятностей, построенное для данных примера 10

Вероятности p_2, p_4 и p_6 не удовлетворяют условию задачи, как вероятности того, что произвольно взятый болт окажется стандартным. Тогда искомая вероятность равна сумме оставшихся вероятностей, каждая из которых вычисляется как произведение ребер соответствующего пути:

$$p_1 + p_3 + p_5 = 0,30 \times 0,02 + 0,45 \times 0,01 + 0,25 \times 0,03 = 0,006 + 0,0045 + 0,0075 = 0,018.$$

Иногда исследователю необходимо переоценить вероятности гипотез, принятых до испытания, по результатам уже проведенного испытания. Сделать это позволяют формулы Байеса [5].

Пусть H_1, H_2, \dots, H_n – n попарно несовместных событий, для которых известны вероятности $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, отличные от нуля ($P(H_i) \neq 0$). Событие A влечет их сумму ($A \subset H_1 + H_2 + \dots + H_n$), причем известны условные вероятности $P(A/H_i)$. Произведен опыт, в результате которого появилось событие A . Тогда условные вероятности событий H_1, H_2, \dots, H_n относительно события A определяются формулами

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \times P(A / H_i)}{P(H_1) \times P(A / H_1) + P(H_2) \times P(A / H_2) + \dots + P(H_n) \times P(A / H_n)},$$

или $P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \times P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \times P(A / H_i)}$, или $P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \times P(A / H_i)}{P(A)}$.

Эти формулы называют *формулами Байеса*.

Вероятности событий H_1, H_2, \dots, H_n до испытания называют *априорными вероятностями* (от латинского a priori, что означает «сперва», до того как был произведен опыт): $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Вероятности тех же событий после испытания называют *апостериорными вероятностями* (от латинского a posteriori, что означает «после», после проведения опыта): $P(H_1/A), P(H_2/A), \dots, P(H_n/A)$.

Таким образом, формулы Байеса позволяют оценить, как изменилась вероятность гипотез H_1, H_2, \dots, H_n после того, как событие A произошло.

Пример 11 [5]. В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на двух автоматах: 40% изготовлено первым автоматом, остальные – вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго – 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Решение. Пусть событие A – «случайно выбранное изделие бракованное», H_1 – «изделие произведено первым автоматом», H_2 – «изделие произведено вторым автоматом».

Из условия задачи следует, что $P(H_1) = 0,4$, $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0,4 = 0,6$, а также $P(A/H_1) = 0,03$; $P(A/H_2) = 0,02$.

Тогда по формуле полной вероятности при $n = 2$ получаем:

$$P(A) = P(H_1) \times P(A/H_1) + P(H_2) \times P(A/H_2) = 0,4 \times 0,03 + 0,6 \times 0,02 = 0,012 + 0,012 = 0,024.$$

В соответствии с формулой Байеса получаем:

$$P(H_1/A) = [P(H_1) \times P(A/H_1)] : P(A) = [0,4 \times 0,03] : 0,024 = 0,012 : 0,024 = 0,5.$$

6. Случайные величины. Распределение случайных величин [5]

Случайной величиной называют переменную величину, которая в зависимости от исходов испытания принимает значения, зависящие от случая.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, принимающая различные значения, которые можно задать в виде конечной или бесконечной числовой последовательности.

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка.

Случайные величины обозначают заглавными буквами латинского алфавита X, Y, Z , а их значения – строчными буквами с индексами x_1, x_2, x_3, \dots .

Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между значениями x_1, x_2, x_3, \dots этой величины и их вероятностями p_1, p_2, p_3, \dots .

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан тремя способами: таблично, аналитически (с помощью формул), графически.

Пусть дискретная случайная величина принимает множество значений x_1, x_2, \dots, x_n соответственно с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n . Зададим закон ее распределения различными способами.

1. *Табличный способ:*

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

В этой таблице сумма вероятностей равна единице: $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, поскольку события $(X = x_i)$, где $i = 1, 2, \dots, n$, образуют полную группу событий.

2. Аналитический способ:

$$P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

3. Графический способ:

Для этого в прямоугольной декартовой системе координат строят точки с координатами $(x_i; p_i)$ и соединяют их последовательно отрезками. Полученная при этом линия называется *многоугольником распределения* случайной величины X .

Пример 12 [5]. Подбрасывается две симметричных монеты. Рассматривается дискретная случайная величина X – число выпадений гербов на обеих монетах. Задать закон распределения случайной величины X .

Решение. Пусть Ц – выпала цифра, Г – выпал герб. В испытании четыре равновероятных элементарных исхода: (Г; Г), (Г; Ц), (Ц; Г), (Ц; Ц), т.е. герб может появиться 2 раза, 1 раз и 0 раз. Значит, случайная величина X может принимать три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Найдем вероятности этих значений:

$$P(X = 0) = 1/4 = 0,25, \quad P(X = 1) = 2/4 = 0,50, \quad P(X = 2) = 1/4 = 0,25.$$

Зададим распределение с помощью таблицы:

X	0	1	2
P	0,25	0,50	0,25

Зададим распределение аналитическим способом:

$$P(X = 0) = 0,25, \quad P(X = 1) = 0,50, \quad P(X = 2) = 0,25.$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0,25 + 0,50 + 0,25 = 1.$$

Зададим распределение графическим способом:

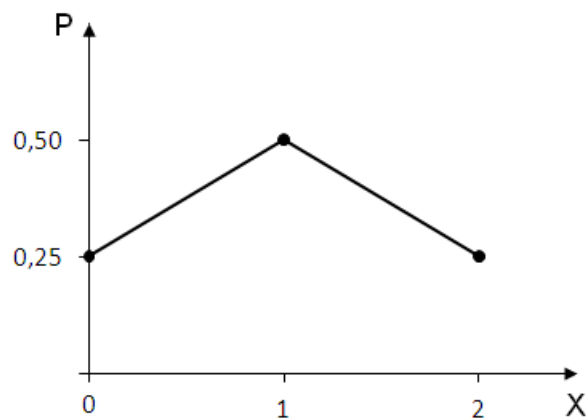


Рис. 4.7. Многоугольник распределения величины X – число выпадений гербов при подбрасывании двух монет

Представленные способы задания случайных величин не являются универсальными. Например, непрерывная случайная величина не может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. В связи с этим вводят общий способ задания любых типов случайных величин с помощью функции распределения вероятностей случайной величины [5; 7].

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, меньшее x , т.е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$. Если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и $F(x)$, т.е. $F(x)$ – функция от x .

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньше чем x .

$$F(x) = P(X < x),$$

где $P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x .

Геометрически это означает следующее: $F(x)$ – есть вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается на числовой прямой точкой, расположенной слева от точки x [5, с. 93].

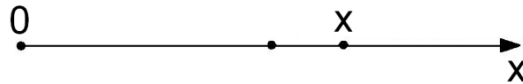


Рис. 4.8. Графическое представление определения функции распределения

Функция распределения $F(x)$ обладает следующими свойствами [5]:

Свойство 1. Значения функции распределения $F(x)$ (как вероятности события) принадлежат отрезку $[0, 1]$: $0 \leq F(x) \leq 1$.

Свойство 2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Геометрическая интерпретация: вероятность попадания случайной величины X в отрезок $(a; b)$ равна длине этого отрезка.

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Поэтому не имеет смысла рассматривать вопрос, какое определенное значение примет непрерывная случайная величина, но имеет смысл рассматривать вероятность попадания ее в интервал, даже сколь угодно малый. Например, определяют вероятность того, что размеры детали не выходят за определенные границы, но не рассматривают вопрос о вероятности совпадения их с проектным размером.

Пример 13 [5]. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ x/4 + 1/4 & \text{при } -1 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значения, принадлежащее интервалу $(0, 2)$: $P(0 < X < 2) = F(2) - F(0)$.

Решение. Так как на интервале $(0, 2)$, по условию $F(x) = x/4 + 1/4$, то по следствию 1 имеем:

$$P(0 \leq X < 2) = F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 3/4 - 1/4 = 2/4 = 1/2.$$

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b) , то: 1) $F(x) = 0$ при $x \leq a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Свойства функции распределения позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины:

- график расположен в полосе, ограниченной прямыми $y = 0$ и $y = 1$ (свойство 1);

- при возрастании x в интервале (a, b) , в котором заключены все возможные значения случайной величины, график «поднимается вверх» (свойство 2);

- при $x \leq a$ ординаты графика равны нулю; при $x \geq b$ ординаты графика равны единице (свойство 3).

График функции распределения непрерывной случайной величины представлен на рисунке [5, с. 94].

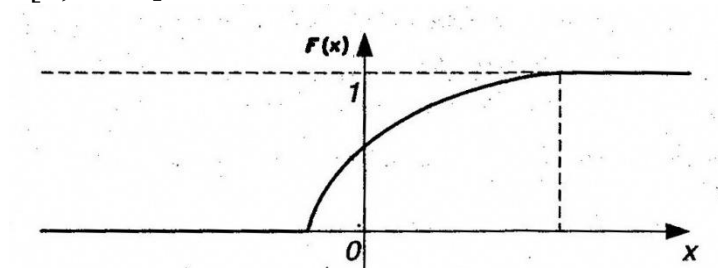


Рис. 4.9. График функции распределения непрерывной случайной величины

Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X , которая может принимать значения x_1, x_2, \dots, x_n с соответствующими вероятностями, имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i),$$

где $x_i < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x .

График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

Пример 14 [5]. Построить функцию распределения дискретной случайной величины, закон распределения которой задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Решение. Для построения функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X воспользуемся формулой $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$.

Тогда: 1) при $x \leq 0$ $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = 0$.

2) при $0 < x \leq 1$ $F(x) = \sum_{x_i < 1} P(X = x_i) = P(X = 0) = 0,2$.

3) при $1 < x \leq 2$ $F(x) = \sum_{x_i < 2} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,2 + 0,4 = 0,6$.

4) при $2 < x \leq 3$ $F(x) = \sum_{x_i < 3} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,2 + 0,4 + 0,3 = 0,9$.

5) при $x > 3$ $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,2 + 0,4 + 0,3 + 0,1 = 1$.

Итак, функция распределения аналитически может быть записана так:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -0, \\ 0.2 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0.6 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0.9 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ представлен на рисунке [5, с. 99]:

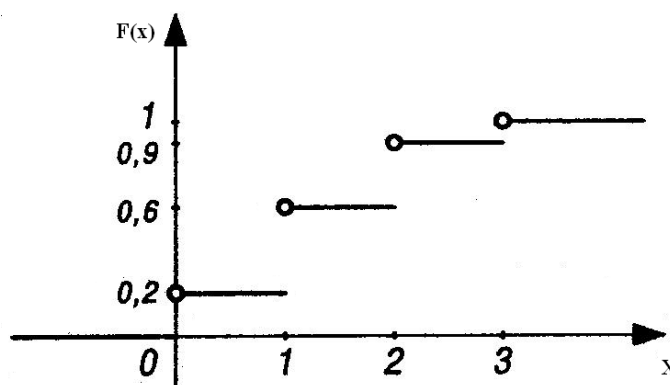


Рис. 4.10. График функции распределения дискретной случайной величины

7. Математическое ожидание случайной величины [5]

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако он часто неизвестен, и тогда случайную величину описывают такими числовыми характеристиками, как математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на их соответствующие вероятности.

Пусть дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Тогда математическое ожидание вычисляется по формуле

$$M(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n, \text{ или } M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i.$$

В больших сериях испытаний математическое ожидание приближено равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины, и тем точнее, чем больше число испытаний. Вследствие этого математическое ожидание случайной величины называют ее средним значением.

Пример 15 [5]. Найти математическое ожидание случайной величины X , если она имеет следующий закон распределения:

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления математического ожидания случайной величины:

$$M(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,2 = 0,5 + 0,4 = 0,9.$$

Свойства математического ожидания случайной величины.

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной:

$$M(C) = C, \text{ где } C = \text{const.}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C \times X) = C \times M(X), \text{ где } C = \text{const.}$$

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Это равенство распространяется и на n случайных величин:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$$

4. Математическое ожидание разности двух случайных величин равно разности их математических ожиданий:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y).$$

5. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(X \times Y) = M(X) \times M(Y).$$

Это равенство распространяется и на n независимых случайных величин:

$$M(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) = M(X_1) \times M(X_2) \times \dots \times M(X_n).$$

6. Значение математического ожидания случайной величины заключено между ее наименьшим и наибольшим значением:

$$x_{\min} < M(X) < x_{\max}.$$

7. Математическое ожидание случайной величины есть величина постоянная; она приблизительно равна среднему арифметическому всех ее возможных значений.

Пример 16 [5]. Известны математические ожидания двух независимых случайных величин X и Y : $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$. Найти математические ожидания суммы, разности и произведения этих величин, а также математическое ожидание случайной величины $Z = 2X + 7$.

Решение. Воспользуемся свойством 3 математического ожидания случайной величины:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y) = 3 + 2 = 5.$$

Воспользуемся свойством 4 математического ожидания случайной величины:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y) = 3 - 2 = 1.$$

Воспользуемся свойством 5 математического ожидания случайной величины:

$$M(X \times Y) = M(X) \times M(Y) = 3 \times 2 = 6.$$

Воспользуемся последовательно свойствами 3, 2 и 1 математического ожидания случайной величины:

$$M(Z) = M(2X + 7) = M(2X) + M(7) = 2 \times M(X) + 7 = 2 \times 3 + 7 = 13.$$

8. Дисперсия случайной величины [5]

Если значения случайной величины значительно отклоняются от ожидаемого среднего, математическое ожидание не в полной мере характеризует случай-

ную величину. В этом случае в качестве характеристики случайной величины используют дисперсию. Дисперсия случайной величины – это числовая характеристика, которая показывает разброс данных относительно математического ожидания.

Пусть X – случайная величина, $M(X)$ – ее математическое ожидание.

Разность $X - M(X)$ называется *отклонением* случайной величины X от ее математического ожидания.

Дисперсией (рассеянием) $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = M([X - M(X)]^2).$$

Для вычисления дисперсии удобно применять следующую формулу:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Из определения и свойств математического ожидания следует, что дисперсия любой случайной величины неотрицательна:

$$D(X) \geq 0.$$

Свойства дисперсии случайной величины.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0, \text{ где } C = \text{const.}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 \times D(X), \text{ где } C = \text{const.}$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Это равенство распространяется и на n взаимно независимых случайных величин: $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$.

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

5. Дисперсия суммы постоянной величины C и случайной величины X равна дисперсии случайной величины X :

$$D(C + X) = D(X), \text{ где } C = \text{const.}$$

6. Дисперсия биномиальной случайной величины B равна произведению числа испытаний n на вероятность этой величины p и на вероятность величины ей противоположной q :

$$D(B) = n \times p \times q, \text{ где } q = 1 - p.$$

Пример 17. Известны дисперсии двух независимых случайных величин X и Y : $D(X) = 3$, $D(Y) = 2$. Найти дисперсию суммы и разности этих величин, а также дисперсию случайной величины $Z = 3X + 7$.

Решение. Воспользуемся свойством 3 дисперсии случайной величины:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 3 + 2 = 5.$$

Воспользуемся свойством 4 дисперсии случайной величины:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) = 3 + 2 = 5.$$

Воспользуемся последовательно свойствами 5 и 2 дисперсии случайной величины:

$$D(Z) = D(3X + 7) = D(2X) = 3^2 \times D(X) = 9 \times 3 = 27.$$

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением) случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию. Например, если X выражается в линейных метрах, то $\sigma(X)$ будет выражаться также в линейных метрах, а $D(X)$ – в квадратных метрах.

Пример 18 [5]. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X , которая имеет следующий закон распределения:

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Решение. Математическое ожидание случайной величины X известно: $M(X) = 0,9$ (см. пример 15). Для вычисления дисперсии нужно найти математическое ожидание случайной величины X^2 , предварительно записав закон ее распределения. Для этого значения случайной величины необходимо возвести в квадрат, а их вероятности оставить без изменения:

X^2	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Тогда $M(X^2) = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,2 = 0,5 + 0,8 = 1,3$.

Воспользуемся формулой для вычисления дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1,3 - 0,9^2 = 1,3 - 0,81 = 0,49.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение случайной величины X :

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,49} = 0,7.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение теории вероятностей как научной отрасли. Сформулируйте ее основную задачу.
2. Дайте определение испытания и события. Приведите примеры.
3. Дайте определения достоверного, невозможного и случайного события. Приведите примеры.
4. Какие два события называются совместными? Несовместными? Противоположными? Приведите примеры.
5. Какие события называют элементарными? Равновозможными? Приведите примеры.
6. Какие события называют благоприятными шансами? Приведите примеры.
7. Что такое полная группа событий? Приведите примеры.
8. Дайте классическое определение вероятности. Приведите примеры.
9. Сформулируйте свойства вероятности события.
10. Дайте определение относительной частоты события.
11. Что такое статистическая вероятность события?
12. Какие действия можно производить над событиями? Дайте определение суммы, произведения, разности событий.

13. В каком случае событие A влечет событие B ? Какие события называются равносильными?
14. Дайте определение комбинаторики как раздела науки.
15. Что называют перестановками из n элементов? Приведите формулу для вычисления перестановок без повторения; с повторениями.
16. Что называют размещениями из n элементов по k ? Приведите формулу для вычисления размещений без повторения; с повторениями.
17. Что называют сочетаниями из n элементов по k ? Приведите формулу для вычисления сочетаний без повторения; с повторениями.
18. Какие формулы связывают сочетания, размещения, перестановки?
19. Сформулируйте комбинаторные правила сложения и умножения.
20. Сформулируйте теоремы сложения вероятностей для совместных (несовместных) событий.
21. Сформулируйте теоремы умножения вероятностей для независимых (зависимых) событий.
22. Запишите формулу полной вероятности события. Поясните ее.
23. Запишите формулы Байеса. Что такое априорная вероятность? Апостериорная вероятность?
24. Дайте определения случайной величины, дискретной случайной величины, непрерывной случайной величины.
25. Что такое закон распределения случайной величины? Какими способами он может быть задан?
26. Дайте определение функции распределения вероятностей случайной величины. Сформулируйте свойства функции распределения.
27. Что представляет собой график функции распределения непрерывной случайной величины? Дискретной случайной величины?
28. Дайте определение математического ожидания случайной величины.
29. Сформулируйте основные свойства математического ожидания случайной величины.
30. Дайте определение дисперсии случайной величины.
31. Сформулируйте основные свойства дисперсии случайной величины.
32. Дайте определение стандартного отклонения случайной величины.

Тема 5 Нормальное распределение

План:

1. Понятие о распределении признака. Нормальное распределение.
2. Нормальное распределение и его свойства.
3. Стандартное нормальное распределение и его характеристика.
4. Правило трех сигм (3σ).
5. Стандартизация и нормализация данных исследования.
6. Проверка нормальности распределения.

Основные понятия и термины: *распределение вероятностей признака, нормальное распределение, параметр положения, параметры масштаба, стандартное (единичное) нормальное распределение, нормированное отклонение, z-преобразование, функция Лапласа, правило трех сигм (3σ), стандартизация методики, тестовые нормы, линейная стандартизация, эмпирическая нормализация, нелинейная нормализация, выброс.*

1. Понятие о распределении признака [8; 13; 18]

Значения исследуемого признака, представляющие исходные данные, невозможно точно предугадать даже при полностью известных условиях эксперимента. Мы можем лишь указать вероятность того, что признак примет то или иное значение или попадет в то или иное множество значений. Последовательность вероятностей того, что исследуемый признак примет определенное значение, и называется *распределением вероятностей* интересующего нас признака. Зная это распределение, мы можем делать некоторые выводы о событиях, в которых участвует этот признак. Однако эти выводы будут носить вероятностный характер.

Среди вероятностных распределений некоторые встречаются на практике довольно часто, поэтому они детально изучены. Одним из таких распределений является *нормальное распределение*. Его название обусловлено тем, что из-за широкого распространения в природе оно первоначально принималось за норму распределения любой случайной величины.

Нормальное распределение используется для приблизительного описания многих случайных явлений, в которых на интересующий нас признак оказывает влияние большое количество независимых случайных величин, среди которых нет сильно выделяющихся. Согласно же теореме А.М. Ляпунова, если случайная величина является суммой большого числа независимых слагаемых, то она с достаточной степенью точности будет распределяться по нормальному закону. Поэтому закон нормального распределения (закон Гаусса) является одним из основных законов статистических явлений.

Эмпирическим путем было установлено, что многие биологические параметры (рост, вес и др.), а также психологические характеристики индивида (например, показатели интеллекта, особенности темперамента, способности) подчиняются нормальному закону. Поэтому развитие измерительного подхода в психологии базируется на использовании закона нормального распределения.

2. Нормальное распределение и его свойства

Распределение показателей, полученных в ходе эмпирических психологических исследований, при большом числе наблюдений, как правило, приближается к нормальному распределению. Нормальное распределение характеризуется следующими параметрами [8]:

– средним значением \bar{x} (математическим ожиданием $M(X)$ для генеральной совокупности), которое характеризует положение графика нормального распределения на числовой оси и поэтому называется *параметром положения*;

– дисперсией σ^2 или стандартным отклонением σ (соответственно $\sigma^2(X)$ или $\sigma(X)$ для генеральной совокупности), которые характеризуют степень растяжения (сжатия) графика нормального распределения и называются *параметрами масштаба*.

Особенность нормального распределения состоит в том, что крайние значения признака в нем встречаются достаточно редко, а значения, близкие к средней величине, – часто. График нормального распределения представляет собой колоколообразную кривую, которую называют иногда кривой Гаусса.

Свойства нормального распределения [8; 18]:

- 1) кривая симметрична относительно прямой $x = \bar{x}$;
- 2) кривая приближается к оси абсцисс асимптотически, никогда не касаясь ее;
- 3) асимметрия и эксцесс кривой равны нулю: $A = 0, E = 0$;
- 4) для нормального распределения характерно совпадение моды, медианы и среднего значения:

$$M_o = M_e = \bar{x};$$

5) форма и положение графика нормального распределения определяются средним значением и стандартным отклонением. При этом:

а) если σ постоянно, а изменяется \bar{x} , то форма кривой неизменна, а график смещается по оси абсцисс вправо (при увеличении \bar{x}) или влево (при уменьшении \bar{x});

б) если \bar{x} постоянно, то изменение σ влечет изменение ширины кривой: при уменьшении σ кривая делается более узкой и поднимается вверх, а при увеличении σ кривая расширяется и опускается вниз [18, с. 51].

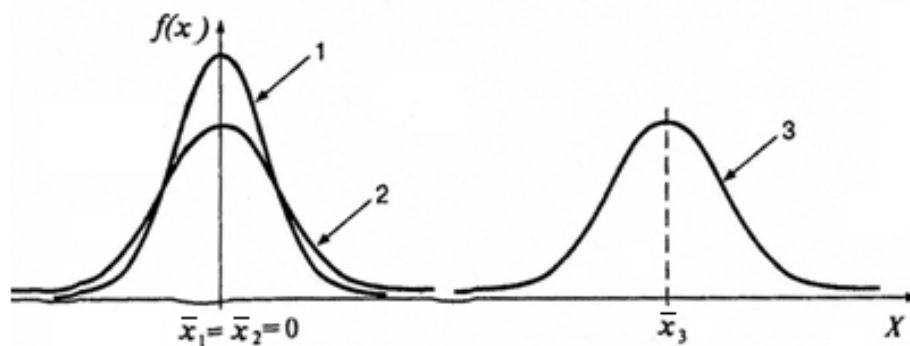


Рис. 5.1. Семейство нормальных кривых:
распределение 1 отличается от распределения 2 стандартным отклонением ($\sigma_1 < \sigma_2$),
а распределение 2 от распределения 3 средним значением ($\bar{x}_2 < \bar{x}_3$)

Однако во всех случаях нормальная кривая строго симметрична относительно среднего значения и сохраняет правильную колоколообразную форму;

б) чем больше величина признака отклоняется от среднего значения, тем меньше частота его встречаемости (или вероятность – для генеральной совокупности) в распределении;

7) нормальная кривая описывается формулой де Муавра:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

где x_i – наблюдаемое значение признака, $f(x)$ – частота, т.е. высота кривой над наблюдаемым значением, \bar{x} – среднее значение признака, σ – стандартное отклонение, π и e – постоянные величины.

Эта формула и соответствующая ей кривая получили название закона нормального распределения.

3. Стандартное нормальное распределение и его характеристика

Теоретически существует бесконечное множество нормальных распределений с различными значениями среднего \bar{x} и стандартного отклонения σ . Среди них выделяется одно с параметрами $\bar{x} = 0$ и $\sigma = 1$. Такое распределение называется *стандартным* (единичным) нормальным распределением и используется как стандарт, эталон. Оно обладает следующими свойствами [8; 18]:

- 1) кривая симметрична относительно прямой $\bar{x} = 0$;
- 2) кривая имеет две точки перегиба, которые расположены на расстоянии -1σ и $+1\sigma$ от среднего значения \bar{x} ;

3) площадь между кривой и осью абсцисс равна единице. Благодаря этому свойству площадь под кривой интерпретируется как вероятность или относительная частота признака, т.е. вся площадь под кривой соответствует вероятности того, что признак примет любое значение из диапазона его изменчивости;

- 4) площадь под кривой справа или слева от нулевой точки равна 0,5;

5) относительная частота встречаемости признака в диапазоне от z_1 до z_2 равна площади под кривой, ограниченной прямыми $x = z_1$ и $x = z_2$.

Любое нормальное распределение может быть сведено к стандартному нормальному распределению путем *z-преобразования*, которое осуществляется по формуле $z = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$. Величину z называют *нормированным отклонением*. Оно

показывает отклонение варианты x_i от среднего значения, выраженное в стандартных отклонениях. Например, $z = -0,3$ означает, что некоторая варианта находится от среднего значения на расстоянии в $0,3\sigma$ в левой части кривой.

Площадь между значениями x_1 и x_2 в нормальном распределении со средним значением \bar{x} и стандартным отклонением σ равна площади между значениями $z_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}$ и $z_2 = \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}$ в стандартном нормальном распределении. Поскольку общая площадь под такой кривой равна единице, то площади между двумя значениями можно рассматривать как проценты или доли целого.

Для вычисления вероятностей встречаемости значений признака в определенном интервале используется *интегральная теорема Лапласа*, которую мы приводим без доказательства [7].

Теорема. Если вероятность наступления события A постоянна и равна p , где $0 < p < 1$, то вероятность того, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 , приближено равна определенному интегралу

$$P_n(k_1; k_2) \approx \frac{1}{2} \pi \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz,$$

$$\text{где } x' = \frac{k_1 - n \times p}{\sqrt{n \times p \times q}}, \quad x'' = \frac{k_2 - n \times p}{\sqrt{n \times p \times q}}, \quad q = 1 - p.$$

Этот интеграл обозначают $\Phi(x)$ и называют *функцией Лапласа*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \pi \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz$$

Упростив формулу для вычисления вероятности, получим

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Поскольку этот неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции, то для функции Лапласа составлена специальная таблица, которой пользуются при решении задач такого типа (Приложение 1). В таблице даны значения функции $\Phi(x)$ для $x \geq 0$. Для $x < 0$ пользуются той же таблицей, учитывая, что $\Phi(x)$ – нечетная функция, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для $x > 5$ значение функции $\Phi(x) = 0,5$, т.е.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \text{табличное значение, при } x \geq 0, \\ \Phi(-x) = -\Phi(x), & \text{при } x < 0, \\ 0,5, & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Пример 1[7]. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажутся непроверенными от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию $n = 400$, $p = 0,2$, $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа: $P_{400}(70; 100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$.

В нашем случае

$$x'' = (k_2 - n \times p) / \sqrt{n \times p \times q} = (100 - 400 \times 0,2) / \sqrt{400 \times 0,2 \times 0,8} = (100 - 80) / (20 \times 0,4) = 20 / 8 = 2,5;$$

$$x' = (k_1 - n \times p) / \sqrt{n \times p \times q} = (70 - 400 \times 0,2) / \sqrt{400 \times 0,2 \times 0,8} = (70 - 80) / (20 \times 0,4) = (-10) / 8 = -1,25.$$

Тогда $P_{400}(70; 100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) \approx \Phi(2,5) + \Phi(1,25)$, поскольку функция $\Phi(x)$ – нечетная.

Для нахождения значений функции Лапласа воспользуемся таблицей Приложения 1:

$$\Phi(2,5) = 0,4938; \quad \Phi(1,25) = 0,3944.$$

$$\text{Тогда } P_{400}(70; 100) \approx \Phi(2,5) + \Phi(1,25) \approx 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Т.е. вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей непроверенными окажутся от 70 до 100 деталей, примерно равна 0,8882.

Для упрощения решения задач такого типа создана специальная таблица, позволяющая определять площадь под кривой справа от любого положительного z (Приложение 2). Пользуясь ею, можно определить вероятность встречаемости значений признака из любого диапазона. Это широко используется при интерпретации данных тестирования [18].

Пример 2 [17]. Значение IQ по шкале Векслера ($\bar{x} = 100$, $\sigma = 15$) некоторого тестируемого равно 125. Насколько часто встречаются значения IQ, ниже или выше 125?

Решение. Перейдем от шкалы IQ к единицам нормированного отклонения (z -значениям):

$$z = (x_i - \bar{x}) / \sigma = (125 - 100) / 15 = 25 / 15 = 1,66.$$

По таблице Приложения 4 находим площадь под кривой справа от этого значения. Она равна 0,0485. Это значит, что IQ = 125 и выше встречается довольно редко – менее чем в 4,85% случаев. Следовательно, IQ ниже 125 встречаются в 95,15% случаев.

4. Правило 3σ

Между средним значением \bar{x} , стандартным отклонением σ и значениями признака, подчиняющимися закону нормального распределения, существует строгая зависимость: отклонения вариант от среднего значения охватывают шесть стандартных отклонений (6σ), три из них расположены слева от среднего значения и три – справа. При этом 68,26% вариант всегда лежат в диапазоне $\pm 1\sigma$ от \bar{x} , 95,44% вариант расположены в пределах $\pm 2\sigma$ и 99,72% вариант – в пределах $\pm 3\sigma$ от среднего значения, какова бы ни была величина стандартного отклонения.

Указанные взаимоотношения среднего значения, стандартного отклонения и отдельных вариант в математической статистике называют *правилом трех стандартных отклонений*, или *правилом трех сигм* (3σ). Графически это правило можно представить следующим образом [8, с. 22]:

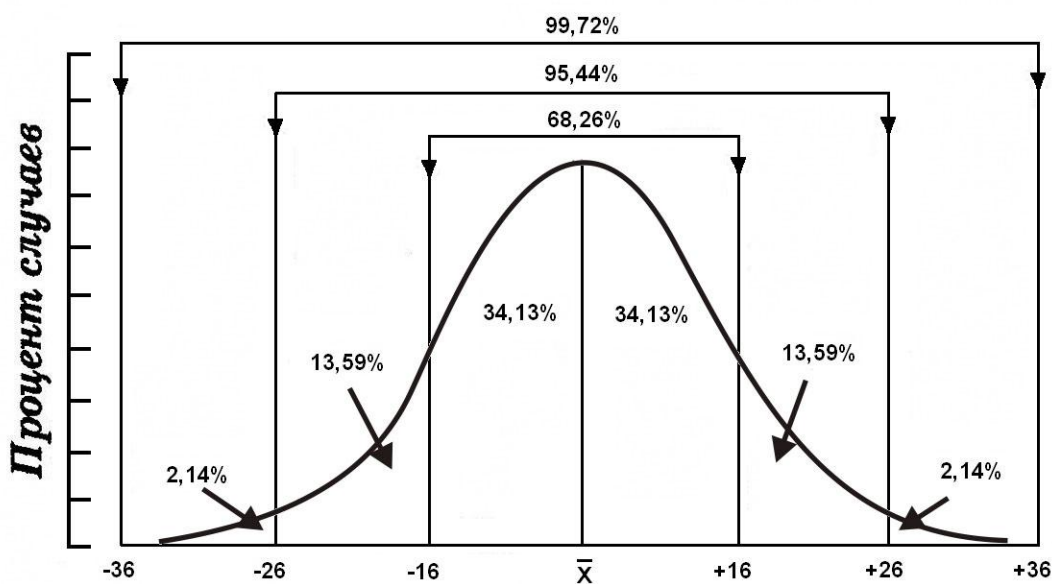


Рис. 5.2 Графическое представление правила трех сигм

Это означает, что вероятность попадания в интервал $(-1\sigma; +1\sigma)$ взятого наугад значения из вариационного ряда равна 0,6826 (т.е. соответствует примерно 68,3% площади под кривой нормального распределения), в интервал $(-2\sigma; +2\sigma)$ – 0,9544 (что соответствует примерно 95,5% площади), а в интервал $(-3\sigma; +3\sigma)$ – 0,9972 (что соответствует примерно 99,7% площади).

Полезно также знать, что при нормальном распределении 90% вариант расположено в диапазоне значений $\bar{x} \pm 1,64\sigma$, 95% вариант – в диапазоне значений $\bar{x} \pm 1,96\sigma$ и 99% вариант – в диапазоне значений $\bar{x} \pm 2,58\sigma$.

Закономерности нормального распределения позволяют по двум параметрам построить весь вариационный ряд [12].

Пример 3 [12]. Пусть для некоторого изучаемого признака, распределенного по нормальному закону, $n = 500$, $\bar{x} = 40$ и $\sigma = 3$. Какое максимальное и минимальное значение принимает признак? Сколько значений признака будет находиться в интервале (37; 43)?

Решение. Воспользуемся правилом 3σ .

$$x_{\min} = \bar{x} - 3\sigma = 40 - 3 \times 3 = 40 - 9 = 31;$$

$$x_{\max} = \bar{x} + 3\sigma = 40 + 3 \times 3 = 40 + 9 = 49.$$

Значение 37 отклоняется от среднего значения 40 на 3, т.е. на величину -1σ ; значение 43 отклоняется от среднего значения 40 на 3, т.е. на величину $+1\sigma$. Известно, что в диапазоне $\pm 1\sigma$ лежит 68,3% вариант.

Тогда количество значений признака, попадающих в интервал (37; 43), можно вычислить следующим образом: $(500 \times 68,3) : 100 \approx 341$.

5. Стандартизация и нормализация данных исследования

Важным аспектом использования закона нормального распределения является разработка тестовых норм, которые необходимо знать для интерпретации результатов тестирования [18].

Например, по итогам выполнения теста умственного развития ребенок получил 116 баллов. Для того чтобы проинтерпретировать полученный результат, его нужно сравнить со статистической нормой, которая определяется следующим образом:

а) берут большую репрезентативную выборку ($n > 200$), на которой проводят тестирование;

б) по результатам выполнения теста строят кривую распределения. В случае отклонения распределения признака от нормального изменяют задания теста до тех пор, пока оно не приблизится к нормальному распределению;

в) для полученных данных рассчитывают среднее значение и стандартное отклонение. Например, для тестов интеллекта Векслера $\bar{x} = 100$, $\sigma = 15$;

г) результаты, находящиеся в диапазоне $\bar{x} \pm 1\sigma$ рассматривают как статистическую норму (68,3% данных). Для тестов Векслера статистической нормой являются результаты от 85 до 115 баллов;

д) результаты, находящиеся в диапазоне $\bar{x} - 2\sigma$ интерпретируют как «ниже нормы», а находящиеся в диапазоне $\bar{x} - 3\sigma$ – «значительно ниже нормы». Так, для теста Векслера результаты, заключенные в интервале (55; 69), интерпретируют как «ниже нормы», а в интервале (40; 54) – «значительно ниже нормы»;

е) результаты, находящиеся в диапазоне $\bar{x} + 2\sigma$ интерпретируют как «выше нормы», а находящиеся в диапазоне $\bar{x} + 3\sigma$ – «значительно выше нормы». Так, для теста Векслера, результаты, заключенные в интервале (116; 130), интерпретируют как «выше нормы», а в интервале (131; 145) – «значительно выше нормы».

Тогда результат в 116 баллов, полученных по итогам выполнения теста умственного развития, можно проинтерпретировать как умственное развитие, соответствующее верхней границе нормы.

В психологии чаще всего используют четыре стандартные шкалы [26].

Характеристика основных стандартных шкал

№ п.п.	Название шкалы	Среднее значение	Стандартное отклонение
1.	IQ-шкала Векслера	100	15
2.	Шкала стенов («стандартная десятка»)	5,5	2
3.	Шкала стенов («стандартная девятка»)	5	2
4.	Т-шкала Маккола	50	10

С их помощью проводится *стандартизация* всех остальных методик – перевод сырых баллов в стандартные тестовые баллы (тестовые нормы), позволяющие интерпретировать результаты диагностики.

Общая последовательность стандартизации методики [18]:

- 1) определяется генеральная совокупность, формируется репрезентативная выборка стандартизации;
- 2) по результатам диагностики строится распределение «сырых» баллов;
- 3) проверяется соответствие полученного распределения нормальному закону;
- 4) если распределение «сырых» баллов соответствует нормальному закону, проводится линейная стандартизация;
- 5) если распределение «сырых» баллов не соответствует нормальному закону, то:
 - а) проводится эмпирическая нормализация, а затем линейная стандартизация;
 - б) проводится нелинейная нормализация.

Линейная стандартизация заключается в том, что каждому стандартному значению (например, стенов) ставится в соответствие интервал «сырых» баллов. Определение границ этих интервалов рассмотрим на примере.

Пример 4 [18]. Пусть эмпирически получено распределение «сырых» баллов, соответствующее нормальному закону, причем $\bar{x} = 22$, $\sigma = 6$. Переведем его в шкалу стенов, для которой $\bar{x}_{ст} = 5,5$, $\sigma_{ст} = 2$.

Среднее сырых баллов должно делить шкалу стенов пополам так, чтобы пять значений (1-5) находились слева и пять значений (6-10) справа. Следовательно, среднее сырых баллов $\bar{x} = 22$ является границей 5 и 6 стенов. Следующая граница справа, отделяющая 6 и 7 стенов, отстоит от стандартного среднего на величину $\sigma_{ст}/2 = 2/2 = 1$. Ей должна соответствовать граница «сырых» баллов, отстоящая от своего среднего $\bar{x} = 22$ на величину $\sigma/2 = 6/2 = 3$, т.е. $\bar{x} + \sigma/2 = 22 + 3 = 25$. Аналогично, двигаясь по шкале «сырых» баллов с шагом $\sigma/2 = 3$ влево и вправо, определяем границы всех оставшихся интервалов. Границы крайних интервалов оставляем открытыми.

Стены	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
«Сырые баллы»	< 11	11-13	14-16	17-19	20-22	23-25	26-28	29-31	32-34	> 34

В общем случае границы интервалов определяются по следующей формуле:

$$x_i = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sigma_{cm}} \times (st_i - \bar{x}_{cm}),$$

где x_i – искомая граница сырых оценок, st_i – граница интервала в стандартной тестовой шкале, \bar{x} и σ – среднее и стандартное отклонение «сырых» оценок, \bar{x}_{cm} и σ_{cm} – среднее и стандартное отклонение стандартной шкалы.

Результатом линейной стандартизации являются *тестовые нормы* – таблица пересчета «сырых» в стандартные тестовые оценки баллов.

Эмпирическая нормализация применяется, если распределение «сырых» баллов отлично от нормального. Она заключается в изменении содержания тестовых заданий, которое позволяет привести эмпирическое распределение к нормальному распределению. Например, в результате исследования получено распределение с правосторонней асимметрией. Это значит, что слишком большая доля испытуемых справляется более чем с половиной заданий. В этом случае для получения нормального распределения нужно либо усложнить задания, либо сократить время их выполнения [18].

Нелинейная нормализация применяется, если эмпирическая нормализация невозможна или нежелательна (например, по причине временных затрат). Тогда устанавливают соответствие процентильных границ стандартной шкалы и процентильных границ шкалы сырых оценок [18].

Пример 5 [18]. Разрабатываемый тест, содержащий 20 заданий, выполняли 200 испытуемых. Результаты тестирования представлены в виде таблицы:

Количество решенных заданий	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Количество испытуемых	2	6	4	6	4	8	6	10	10	12	12	16	24	20	14	14	10	14	8

Исходное распределение отлично от нормального, имеет правостороннюю асимметрию.

Выберем в качестве стандартной шкалы шкалу стенойнов ($\bar{x}_{cm} = 5$, $\sigma_{cm} = 2$), для которой известны процентные доли: 1 стенойна – 4%, 2 стенойна – 7%, 3 стенойна – 12%, 4 стенойна – 17%, 5 стенойнов – 20%, 6 стенойнов – 17%, 7 стенойнов – 12%, 8 стенойнов – 7%, 9 стенойнов – 4%. Определим процент испытуемых выборки, который соответствует каждой процентной доле. Например, 1 стенойну соответствует 4% – $200:100 \times 4 = 8$ испытуемых. Восемь первых испытуемых, как следует из таблицы, выполнили либо 2, либо 3 задания, т.е. меньше 4-х заданий. Аналогично, 2 стенойнам соответствует 7% – $200:100 \times 7 = 14$ испытуемых. Четырнадцать следующих испытуемых, как следует из таблицы, выполнили от 4-х до 6-ти заданий.

Таким же образом рассчитываем остальные процентные доли. Результаты расчетов можем представить в виде следующей таблицы:

Стенойны	1	2	3	4	5	6	7	8	9
%	4%	7%	12%	17%	20%	17%	12%	7%	4%
«Сырые» баллы	< 4	4-6	7-9	10-12	13-14	15-16	17-18	19	20

Теперь сырые баллы можно перевести в стенойны и проинтерпретировать их.

6. Проверка нормальности распределения

На практике очень часто приходится определять, является ли выборочное распределение измеренной переменной нормальным или нет. Для этого используются различные приемы [27]:

1) сравнивают эмпирическое и теоретическое распределения с помощью специальных критериев (например λ -критерия Колмогорова-Смирнова или χ^2 -критерия Пирсона). Эти критерии будут рассмотрены нами позже;

2) используют метод Н.А. Плохинского или метод Е.И. Пустыльника.

Рассмотрим *метод Н.А. Плохинского*.

а) по известным формулам вычисляем значения асимметрии и эксцесса:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}}{n \times \sigma^3} \quad \text{и} \quad E = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}}{n \times \sigma^4} - 3 ;$$

б) вычисляем ошибки репрезентативности для А и Е по следующим формулам:

$$m_A = \sqrt{\frac{6}{n}} \quad \text{и} \quad m_E = 2\sqrt{\frac{6}{n}} ;$$

в) производим сравнения:

- если $m_A \geq 3$ и $m_E \geq 3$, то распределение признака отлично от нормального;

- если $m_A < 3$ и $m_E < 3$, то распределение признака не отличается от нормального.

Метод Е.И. Пустыльника заключается в следующем:

а) вычисляем значения асимметрии и эксцесса;

б) вычисляем критические значения для А и Е по следующим формулам:

$$A_{кр} = 3\sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} \quad \text{и} \quad E_{кр} = 5\sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} ;$$

в) производим сравнения:

- если $A_{эмп} \geq A_{кр}$ и $E_{эмп} \geq E_{кр}$, то распределение признака отлично от нормального;

- если $A_{эмп} < A_{кр}$ и $E_{эмп} < E_{кр}$, то распределение признака не отличается от нормального.

Причины отклонения распределения от нормального распределения [18, 21]:

1) ограничение (сверху или снизу) размаха вариаций (например, время двигательной реакции). Иногда такое ограничение можно преодолеть, увеличив объем выборки;

2) неоднородность выборки – наложение друг на друга нескольких распределений (например, тревожность у девушек и юношей) или наличие выбросов.

Выброс – это значение переменной x_i , отличающееся от среднего значения более чем на 2σ (при $n < 50$) или более чем на 3σ (при $n > 50$) [18]. Если таких значений немного, их исключают из выборки, уменьшив ее объем; если много – выборку разбивают на две и исследуют их по отдельности.

Для определения того, является ли та или иная варианта выбросом, используют нормированное отклонение. Оно позволяет определить, относится ли данное наблюдение к интересующей нас совокупности или является «выбросом», который можно исключить из выборки.

Правила исключения варианты из выборки [12]:

а) если $n > 50$, то при $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} > 3$ x_i исключается, при этом \bar{x} и σ рассчитываются без «выброса»;

б) если $n < 50$, то при $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} > 2$ x_i исключается, при этом \bar{x} и σ рассчитываются без «выброса».

Пример 6 [12]. Возраст испытуемых в исследовании 1, 3, 3, 5, 7, 11, 12, 32 лет. Можем ли мы исключить из рассмотрения последнюю варианту?

Решение. Вычислим среднее значение и стандартное отклонение без «выскакивающей» варианты: $\bar{x} = (1 + 3 + 3 + 5 + 7 + 11 + 12) : 7 = 42 : 7 = 6$.

$$D = [(1 - 6)^2 + (3 - 6)^2 \times 2 + (7 - 6)^2 + (11 - 6)^2 + (12 - 6)^2] : (7 - 1) = (25 + 18 + 1 + 25 + 36) : 6 = 105 : 6 = 17,5.$$

$$\text{Тогда } \sigma = \sqrt{17,5} \approx 4.$$

$$\text{Вычислим нормированное отклонение для варианты 32: } z = \frac{32 - 6}{4} = 6,5.$$

Таким образом, варианта 32 выходит за пределы 2σ ($n < 50$), т.е. в характеристике среднего возраста испытуемых ею можно пренебречь.

3) используемая измерительная шкала обладает неравномерной чувствительностью к измеряемому свойству в разных диапазонах его изменчивости.

Например, измеряется некая способность индивида с помощью количества выполненных заданий за отведенное время. Если задания простые или время слишком велико, то эта процедура будет чувствительна только в отношении тех испытуемых, для которых задания достаточно трудны. При этом очень большая доля испытуемых будет решать все или почти все задания. Получится распределение с правосторонней асимметрией. Для устранения этого недостатка можно заменить задания на более сложные или сократить время выполнения. Но если задания слишком усложнить, то значительная часть испытуемых не справится с ними и возникнет левосторонняя асимметрия.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое распределение вероятностей признака?

2. Сформулируйте теорему А.М. Ляпунова.

3. Какое распределение признака называют нормальным распределением?

Где оно встречается?

4. Какие параметры задают нормальное распределение?

5. Перечислите свойства нормального распределения.

6. Сформулируйте закон нормального распределения.

7. Какое распределение признака называется стандартным (единичным) нормальным распределением?

8. Сформулируйте свойства стандартного нормального распределения.
9. Сформулируйте интегральную теорему Лапласа. Для чего она применяется?
10. Что такое z -преобразование?
11. Дайте определение нормированного отклонения. Для чего оно используется?
12. Сформулируйте правило 3σ . Представьте его графически.
13. Для чего используется нормальное распределение?
14. Перечислите используемые в психологии стандартные шкалы.
15. Для чего проводится стандартизация методики?
16. Что такое тестовые нормы?
17. Перечислите основные этапы стандартизации методики.
18. В чем заключается линейная стандартизация результатов методики?
19. В чем заключается эмпирическая нормализация результатов методики?
20. В чем заключается нелинейная нормализация результатов методики?
21. Какие приемы проверки выборочного распределения на нормальность используются?
22. Представьте метод Н.А. Плохинского.
23. Представьте метод Е.И. Пустыльника.
24. Какие причины могут приводить к отклонению выборочного распределения от нормального?
25. Что такое выброс?
26. Как определить, является ли вариант выбросом?

Тема 6 Теория оценок

План:

1. Выборочный метод и его задачи.
2. Точечное оценивание. Свойства точечных оценок.
3. Интервальное оценивание и его виды.
4. Определение минимального объема выборки.

Основные понятия и термины: параметры, статистики, оценки параметров, точечная оценка, несмещенная оценка, состоятельная оценка, эффективная оценка, исправленная выборочная дисперсия, интервальная оценка, доверительный интервал, надежность оценки, точность оценки, пилотажная выборка.

1. Выборочный метод и его задачи [7]

При проведении психологического исследования генеральная совокупность является недоступной для сплошного изучения, поэтому о ее свойствах судят по свойствам выборочной совокупности, случайным образом извлеченной из генеральной совокупности. В этом состоит суть выборочного метода.

В теории выборок существуют различия между определениями понятий, относящихся к исходным генеральным совокупностям и к извлеченным из них выборкам.

Генеральная совокупность описывается с помощью теории вероятностей, в которой вероятность события задается *до проведения испытания*. Все формулы и теоремы теории вероятностей не зависят от исходов испытаний. Поэтому вероятностные характеристики случайной величины X , характеризующие генеральную совокупность (в том числе закон распределения), называют *теоретическими*. Показатели, рассчитанные для генеральной совокупности, называют *параметрами*. К ним относится математическое ожидание случайной величины $M(X)$ и ее дисперсия $D(X)$.

Выборочная совокупность описывается с помощью математической статистики. Она задается *после проведения испытания* статистическим распределением, т.е. перечнем значений признака и соответствующих им частот. Эти характеристики и распределение признака, представляющие выборочную совокупность, называют *эмпирическими*. Показатели, рассчитанные для выборочной совокупности, называют *статистиками*. К ним относится среднее значение \bar{x} и выборочная дисперсия D .

В каждом психологическом исследовании стремятся перенести результаты и выводы, полученные на отдельной выборочной совокупности, на всю генеральную совокупность, из которой была извлечена выборка. Однако статистики, полученные на различных выборках, извлеченных из одной генеральной совокупности, как правило, отличаются друг от друга. В связи с этим статистики лишь приблизительно описывают параметры.

Основная задача выборочного метода состоит в том, чтобы по значениям статистик (\bar{x} и D) произвести оценку параметров генеральной совокупности ($M(X)$ и $D(X)$). Поэтому показатели выборок – статистики – называют также *оценочными значениями*, или *оценками параметров*.

Теория выборок дает возможность решить также следующие задачи:

- определить величину погрешности при выборочном сборе данных и оценить надежность (достоверность) результатов;
- определить минимальный объем выборки, чтобы по выборочным данным (статистикам) можно было судить о данных генеральной совокупности (параметрам).

2. Точечное оценивание. Свойства точечных оценок

Оценкой параметра называется определенная числовая характеристика, полученная из выборки. Оценка параметра, которая определяется одним числом, называется *точечной оценкой* [15].

В качестве точечных оценок параметров генеральной совокупности используются соответствующие выборочные характеристики. Теоретическое обоснование этого положения дают закон больших чисел и предельная теорема Ляпунова [15]. Так, выборочная средняя является точечной оценкой генеральной средней, а выборочная дисперсия – точечной оценкой генеральной дисперсии:

$$\bar{x} \approx M(X) \text{ и } D \approx D(X).$$

Для того чтобы точечные оценки могли представлять оцениваемые параметры, они должны обладать такими свойствами, как несмещенность, состоятельность, эффективность [4; 7].

Несмещенной называют точечную оценку, если среднее выборочного распределения оценки равно величине оцениваемого параметра.

Это означает, что если из генеральной совокупности извлечь бесконечное число случайных выборок, вычислить для каждой из них, например, среднее значение (или медиану), а затем вычислить среднее этих выборочных средних значений (или медиан), то оно окажется равным математическому ожиданию генеральной совокупности. Например, несмещенными оценками параметров являются выборочное среднее, выборочная мода и выборочная медиана, а вот выборочная дисперсия – смещенная оценка генеральной дисперсии.

Состоятельной называют точечную оценку параметра, значения которой с увеличением объема выборки приближаются к значению оцениваемого параметра. Условие состоятельности означает, что в этом случае оценка параметра вычисляется по выборке так, что если бы аналогичный расчет выполнялся по всей генеральной совокупности, то он дал бы значение параметра.

Состоятельными могут быть как смещенные, так и несмещенные оценки: например, выборочная дисперсия D (смещенная оценка), как и выборочное среднее \bar{x} (несмещенная оценка), являются состоятельными оценками, поскольку при увеличении объема выборки будут приближаться к значениям генеральной дисперсии $D(X)$ и математического ожидания $M(X)$ соответственно.

Эффективной называют точечную оценку параметра, которая при данном объеме выборки n имеет наименьшую возможную дисперсию. Это означает, что при переходе от выборки к выборке изменчивость такой оценки (дисперсия ошибки оценки) наименьшая.

Например, в качестве точечной оценки математического ожидания $M(X)$ можно рассматривать все меры центральной тенденции (моду, медиану, среднее), все они являются несмещенными. Однако выборочное среднее является наиболее эффективной оценкой: если для оценки $M(X)$ используется медиана 100 выборочных наблюдений, то той же степени точности оценивания можно добиться, извлекая выборку из 64 наблюдений и вычислив \bar{x} .

Поскольку выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности, то в качестве ее несмещенной оценки рассматривается *исправленная выборочная дисперсия* S^2 , которая вычисляется по формуле

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \times D, \text{ где } n - \text{объем выборки, } D - \text{выборочная дисперсия.}$$

Пример 1 [7]. По выборке объема $n = 41$ найдена смещенная оценка $D = 3$ генеральной дисперсии $D(X)$. Найти ее несмещенную оценку.

Решение. Несмещенной оценкой генеральной дисперсии $D(X)$ является исправленная выборочная дисперсия S^2 . Для ее вычисления воспользуемся следующей формулой:

$$S^2 = n/(n-1) \times D = 41/(41-1) \times 3 = 41/40 \times 3 = 1,025 \times 3 = 3,075.$$

При больших объемах выборки ($n \geq 30$) выборочная дисперсия D и исправленная выборочная дисперсия S^2 практически совпадают. Таким образом, генеральная дисперсия имеет две точечных оценки: выборочную дисперсию D и ис-

правленную выборочную дисперсию S^2 . Первую используют при $n \geq 30$, вторую – при $n < 30$.

Генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ также имеет две точечные оценки: выборочное среднее квадратическое отклонение σ и исправленное среднее квадратическое отклонение S . σ используется для оценивания $\sigma(X)$ при $n \geq 30$, а S – при $n < 30$. При этом $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, а $S = \sqrt{S^2}$ [15].

3. Интервальное оценивание и его виды [7]

При выборках малого объема точечные оценки могут значительно отличаться от оцениваемых параметров. Поэтому наряду с точечными оценками параметров используют их интервальные оценки.

Интервальной оценкой называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего с определенной вероятностью оцениваемый параметр.

Доверительным интервалом называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки параметра $M(X)$ по статистике \bar{x} называют вероятность γ , с которой осуществляется неравенство $|M(X) - \bar{x}| < \Delta$, где Δ – *точность оценки*.

Записав это выражение в виде двойного неравенства, получим

$$\bar{x} - \Delta < M(X) < \bar{x} + \Delta.$$

Таким образом, мы получили интервальную оценку математического ожидания, которая представляет собой доверительный интервал.

Обычно надежность γ задают наперед, используя при этом три значения: 0,95; 0,99 и 0,999.

В психологических исследованиях доверительные интервалы для параметров генеральной совокупности $M(X)$ и $D(X)$ определяются по выборочным статистикам \bar{x} и D , плюс-минус значение, рассчитанное на основе характеристик нормального распределения с учетом объема выборки n и надежности γ .

Случай 1. Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания $M(X)$ нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней \bar{x} и при известном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности $\sigma(X)$ служит доверительный интервал

$$\bar{x} - t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}},$$

где $t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \Delta$ – *точность оценки*, n – *объем выборки*, t – *значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$* .

Пример 2[7]. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания $M(X)$ нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 3$, выборочная средняя $\bar{x} = 4$ и объем выборки $n = 36$.

Решение. Требуется найти доверительный интервал

$$x - t \times (\sigma(X) / \sqrt{n}) < M(X) < x + t \times (\sigma(X) / \sqrt{n}).$$

Все величины, кроме t , известны: $\gamma = 0,95$, $\sigma(X) = 3$, $x = 4$ и $n = 36$. По таблице для функции распределения Лапласа (Приложение 1) находим $t = 1,96$.

Найдем точность оценки: $\Delta = t \times \sigma(X) / \sqrt{n} = 1,96 \times 3 / \sqrt{36} = 0,98$.

Тогда $4 - 0,98 < M(X) < 4 + 0,98$, или $3,02 < M(X) < 4,98$.

Таким образом, математическое ожидание случайной величины X с вероятностью 0,95 попадет в числовой интервал (3,02; 4,98).

Случай 2. Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания $M(X)$ нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней \bar{x} при неизвестном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности $\sigma(X)$ (и объеме выборки $n < 30$) служит доверительный интервал

$$\bar{x} - t_\gamma \times \frac{S}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t_\gamma \times \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где S – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, n – объем выборки, t_γ находят по таблице по заданным n и γ (Приложение 3).

Пример 3 [6]. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 30,1$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерения распределены нормально.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию $M(X)$. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания при неизвестном $\sigma(X)$ при помощи доверительного интервала

$$\bar{x} - t_\gamma \times (S / \sqrt{n}) < M(X) < \bar{x} + t_\gamma \times (S / \sqrt{n}).$$

Все величины, кроме t_γ , известны: $\gamma = 0,99$, $S = 6$, $\bar{x} = 30,1$ и $n = 9$. По таблице Приложения 3 при известных $\gamma = 0,99$ и $n = 9$ находим $t_\gamma = 3,36$.

Найдем значение выражения $t_\gamma \times (S / \sqrt{n}) = 3,36 \times (6 / \sqrt{9}) = 3,36 \times 2 = 6,72$.

Тогда $30,1 - 6,72 < M(X) < 30,1 + 6,72$, или $23,38 < M(X) < 36,82$.

Таким образом, истинное значение измеряемой величины с вероятностью 0,99 попадет в числовой интервал (23,38; 36,82).

Случай 3. Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения $\sigma(X)$ нормально распределенного количественного признака X по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению S служит доверительный интервал

$$S \times (1 - q) < \sigma(X) < S \times (1 + q), \text{ при } q < 1, \\ \text{или } 0 < \sigma(X) < S \times (1 + q), \text{ при } q > 1,$$

где S – «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение, q находят с помощью таблицы по заданным n и γ (Приложение 4).

Пример 4 [6]. По данным выборки объема $n = 16$ из генеральной совокупности найдено «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение $S = 1$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, с надежностью 0,95.

Решение. Задача сводится к отысканию доверительного интервала

$$S \times (1 - q) < \sigma(X) < S \times (1 + q), \text{ при } q < 1, \\ \text{или } 0 < \sigma(X) < S \times (1 + q), \text{ при } q > 1.$$

По условию $\gamma = 0,95$, $S = 1$ и $n = 16$. По таблице Приложения 4 находим $q = 0,44$. Так как $q < 1$, то воспользуемся первым неравенством

$$S \times (1 - q) < \sigma(X) < S \times (1 + q), \text{ при } q < 1.$$

Тогда $1 \times (1 - 0,44) < \sigma(X) < 1 \times (1 + 0,44)$, или $0,56 < \sigma(X) < 1,44$.

Таким образом, генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ с надежностью 0,95 попадет в числовой интервал (0,56; 1,44).

4. Определение минимального объема выборки

Доверительный интервал оценки генеральной средней (математического ожидания $M(X)$) зависит от объема выборки. Поскольку в формуле расчета точности оценки Δ объем выборки n стоит в знаменателе ($\Delta = t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$), то между

объемом выборки и точностью оценки существует обратная связь: чем больше выборка, тем уже будет доверительный интервал и тем точнее оценка параметра. Самой большой выборкой является генеральная совокупность и в этом случае оценка параметра вообще будет точечной. Однако при этом не будет соблюдаться экономичность исследования, которая и является целью выборочного метода. Поэтому необходимо найти такой оптимальный объем выборки, при котором по выборочным статистикам мы могли бы судить о параметрах генеральной совокупности. Это и будет тот минимальный объем выборки, при котором ее можно назвать репрезентативной [15].

При этом объем выборки будет зависеть от следующих характеристик [8; 15]:

- от однородности выборки;
- от задаваемой надежности γ (0,95; 0,99 или 0,999);
- от желаемой точности оценки Δ , т.е. величины ошибки репрезентативности.

Для оценки средней в генеральной совокупности при известном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности $\sigma(X)$ минимальный объем репрезентативной выборки рассчитывается по формуле

$$n = t^2 \times \frac{\sigma^2(X)}{\Delta^2}$$

Пример 5 [6]. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания $M(X)$ генеральной совокупности по выборочной средней равна $\Delta = 0,3$, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 1,2$ нормально распределенной генеральной совокупности.

Решение. Воспользуемся формулой для определения объема выборки для оценки генеральной средней $n = t^2 \times \sigma^2(X) / \Delta^2$. По условию задачи $\sigma(X) = 1,2$, $\Delta = 0,3$, $\gamma = 0,975$. Определим t из соотношения $\Phi(t) = \gamma/2 = 0,975/2 = 0,4875$. По таблице функции Лапласа (Приложение 1) определим величину $t = 2,24$. Подставив все данные в формулу, получим

$$n = 2,24^2 \times 1,2^2 / 0,3^2 \approx 5,02 \times 1,44 / 0,09 \approx 80,28 \approx 81.$$

Округляем численность до большего целого значения, чтобы не уменьшить доверительный интервал. Таким образом, объем выборки составляет 81.

Если же среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma(X)$ неизвестно, то в качестве его предварительной оценки можно взять соответствующий показатель, рассчитанный по данным пилотажного исследования на *пробной (пилотажной) выборке*. Задачей данного исследования является проверка точности формулировки гипотез, правильности подбора диагностического инструментария, адекватности методов обработки и интерпретации данных. Пилотажное исследование проводится по сокращенному плану на меньшей выборке и позволяет, в случае необходимости, скорректировать программу исследования [3].

Пример 6 [15]. С помощью случайной выборки оценили среднее время, которое затрачивают студенты на выполнение тестового задания. Каким должен быть объем выборки в этом случае, если в пробных выборочных исследованиях стандартное отклонение времени выполнения теста составило 40 мин, а отклонение выборочной средней от генеральной средней по абсолютной величине не должно превышать 5 мин с надежностью 0,95?

Решение. Используем формулу определения объема выборки для оценки генеральной средней $n = t^2 \times \sigma^2(X) / \Delta^2$. По условию задачи $\sigma(X) = 40$, $\Delta = 5$, $\gamma = 0,95$. Определим t из соотношения $\Phi(t) = \gamma/2 = 0,95/2 = 0,475$. По таблице функций Лапласа определим величину $t = 1,96$. Подставив все данные в формулу, получим

$$n = 1,96^2 \times 40^2 / 5^2 \approx 3,84 \times 1600 / 25 \approx 245,86 \approx 246.$$

Таким образом, объем выборки должен быть не менее 246 человек.

Если же проведение пилотажного исследования невозможно, то оценить среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma(X)$ можно используя правило 3σ по минимальному и максимальному значениям исследуемого признака, который распределен нормально [15].

Согласно закону нормального распределения отклонения вариант от среднего значения охватывают шесть стандартных отклонений (6σ), три из них расположены слева от среднего значения и три – справа. Тогда $x_{\max} - x_{\min} = 6\sigma$. Откуда получаем $\sigma = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{6}$.

Пример 7 [15]. С помощью случайной выборки оценивают средний балл студентов на экзамене по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Каким должен быть объем выборки, если отклонение выборочной средней от генеральной средней по абсолютной величине не должно превышать 0,2 балла с надежностью 0,99?

Решение. Используем формулу определения объема выборки для оценки генеральной средней $n = t^2 \times \sigma^2(X) / \Delta^2$. По условию задачи $\Delta = 0,2$, $\gamma = 0,99$. Определим t из соотношения $\Phi(t) = \gamma/2 = 0,99/2 = 0,495$. По таблице функций Лапласа (Приложение 1) получим $t = 2,58$.

Оценим величину σ по вариационному размаху, учитывая что $x_{\max} = 9$, а $x_{\min} = 4$. Тогда $\sigma = (x_{\max} - x_{\min}) / 6 = (9 - 4) / 6 = 5/6 \approx 0,83$.

Подставив все данные в формулу, получим:

$$n = 2,58^2 \times 0,83^2 / 0,2^2 \approx 6,66 \times 0,69 / 0,04 \approx 114,82 \approx 115.$$

Таким образом, объем выборки должен составить не менее 115 человек.

Вопросы для самоконтроля:

1. В чем заключается суть выборочного метода?
2. Как можно описать генеральную совокупность?
3. Как можно описать выборочную совокупность?
4. Что называют параметрами?

5. Что называют статистиками?
6. Какие задачи позволяет решить выборочный метод?
7. Что называют оценками параметров?
8. Какая оценка параметра называется точечной?
9. Какая точечная оценка параметра называется несмещенной? Приведите примеры.
10. Какая точечная оценка параметра называется состоятельной? Приведите примеры.
11. Какая точечная оценка параметра называется эффективной? Приведите примеры.
12. Что является несмещенной оценкой генеральной дисперсии? Приведите формулу для ее вычисления.
13. Назовите точечные оценки генерального среднего квадратического отклонения?
14. Что называют интервальной оценкой параметра?
15. Что называют доверительным интервалом?
16. Что называют надежностью оценки? Как она обозначается?
17. Что называют точностью оценки? Как она обозначается и вычисляется?
18. Как найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака при известном генеральном среднем квадратическом отклонении?
19. Как найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака при неизвестном генеральном среднем квадратическом отклонении?
20. Как найти доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормально распределенного количественного признака по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению?
21. Как рассчитать минимальный объем выборки при известном среднем квадратическом отклонении?
22. Что такое пилотажное исследование? С какой целью оно проводится?
23. Как определить минимальный объем выборки при неизвестном среднем квадратическом отклонении?

Тема 7 Проверка статистических гипотез

План:

1. Гипотезы и их виды.
2. Зависимые и независимые выборки.
3. Понятие о числе степеней свободы.
4. Уровень статистической значимости.
5. Статистические критерии и их характеристика.
6. Общая схема проверки статистической гипотезы.

Основные понятия и термины: гипотеза, теоретическая гипотеза, описательная гипотеза, объяснительная гипотеза, статистическая гипотеза, нулевая гипотеза, альтернативная гипотеза, направленная гипотеза, ненаправленная гипотеза, зависимые выборки, независимые выборки, число степеней свободы, уровень значимости, доверительная вероятность, доверительный интервал, ошибка первого рода, ошибка второго рода, статистический критерий, мощность статистического критерия, параметрический критерий, непараметрический критерий, ось значимости, зона значимости, зона незначимости.

1. Гипотеза. Виды гипотез

Одним из основных понятий, используемых в научных исследованиях, является *гипотеза* (от греч. *ὑπόθεσις* – основание, предположение). Гипотеза в научных исследованиях выдвигается для того, чтобы дать предварительное, но вероятностное объяснение реальному обстоятельству, которое более или менее исследовано.

Выделяют следующие виды гипотез: теоретические и статистические.

Теоретическая (научная) гипотеза – это научно обоснованное высказывание вероятностного характера относительно сущности, взаимосвязей и причин явлений объективной действительности [8].

Признаки правильно сформулированной научной гипотезы были предложены П. Фрессом:

- гипотеза должна быть адекватной поставленной проблеме;
- гипотеза должна учитывать уже имеющиеся в науке знания по исследуемой проблеме;
- гипотеза должна быть доступной для проверки (верифицируемой).

Различают два основных вида теоретических гипотез [11]:

а) *описательные* – направлены на изучение структуры исследуемого объекта (характера связей в нем, типичного набора факторов) и его функций (предположение о тесноте связей);

б) *объяснительные* – представляют собой предположения о причинно-следственных связях в изучаемом объекте.

После того как научная гипотеза сформулирована, проводится поиск показателей (понятий, входящих в ее состав), которые могут быть измерены в ходе эмпирического исследования, а затем обработаны с помощью методов математической статистики и проинтерпретированы.

Поскольку в психологических исследованиях мы имеем дело с данными, в которых интересующие исследователя закономерности искажены различными случайными факторами, большинство статистических выводов сопровождается проверкой некоторых гипотез об источнике этих данных.

Статистическая гипотеза – это предположение о распределении вероятностей признака, которое мы хотим проверить по имеющимся данным. Выделяют нулевую (основную) и альтернативную (конкурирующую) статистические гипотезы [27].

Нулевая гипотеза (H_0) – это основное проверяемое предположение об отсутствии статистического эффекта. Оно формулируется как отсутствие различий, отсутствие связи, отсутствие влияния фактора, равенство нулю значений выборочных характеристик и т.п.

Например, в случае установления наличия (отсутствия) различий, нулевая гипотеза говорит о том, что исследуемые выборки принадлежат к одной совокупности и различия между ними признаны случайными (недостоверными):

H_0 : «Уровень умственного развития гимназистов (\bar{x}_1) не отличается от уровня умственного развития учащихся общеобразовательных школ (\bar{x}_2), т.е. $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ или $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0$ ».

Альтернативная гипотеза (H_1) – это рабочая гипотеза исследования, предположение о наличии статистического эффекта. Она говорит о том, что между выборками существуют достоверные различия (взаимосвязь, влияние фактора и т.д.), которые обусловлены влиянием независимой переменной.

Для предыдущего примера альтернативная гипотеза H_1 может быть сформулирована следующим образом:

H_1 : «Уровень умственного развития гимназистов отличается от уровня умственного развития учащихся общеобразовательных школ (т.е. $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$)».

Альтернативная гипотеза – это предположение, которое хочет доказать исследователь, поэтому ее иногда называют *экспериментальной* гипотезой.

Нулевая и альтернативная гипотезы могут быть направленными и ненаправленными [27].

Ненаправленные гипотезы говорят только о наличии или отсутствии различий (связи и т.д.). Примером ненаправленных гипотез являются сформулированные выше гипотезы об уровне умственного развития гимназистов и учащихся общеобразовательных школ.

Направленные гипотезы говорят не только о наличии или отсутствии различий (связи и т.д.), но и указывают их направление.

Например, H_0 : «Уровень умственного развития гимназистов не превышает уровня умственного развития учащихся общеобразовательных школ»;

H_1 : «Уровень умственного развития гимназистов превышает уровень умственного развития учащихся общеобразовательных школ».

В статистических гипотезах речь идет не об арифметических (т.е. числовых), а о статистически значимых различиях, т.е. с одинаковой ли частотой встречаются различные значения признака в обоих эмпирических распределениях.

Нулевая гипотеза всегда проверяется по отношению к альтернативной, поскольку они образуют полную группу несовместных событий: если верна одна из них, то другая является ложной, и наоборот, отклонение одной из них неизбежно влечет принятие другой [18]. Поэтому альтернативная гипотеза H_1 принимается (а не доказывается), если с помощью рассуждений мы можем отвергнуть нулевую гипотезу H_0 , т.е. альтернативная гипотеза подтверждается не прямо, а косвенно.

2. Зависимые и независимые выборки

В зависимости от цели исследования экспериментатор использует два вида выборок – зависимые и независимые.

Зависимые (связанные) выборки характеризуются тем, что каждому испытуемому одной выборки можно поставить в соответствие по определенному критерию испытуемого из другой выборки. Например, испытуемые группы до и после коррекционного воздействия; выборки мужей и жен; выборки, состоящие из близнецов. Количество объектов в зависимых выборках всегда одинаково [18].

Независимые (несвязанные) выборки характеризуются тем, что вероятность отбора любого испытуемого из одной выборки не зависит от отбора любого из испытуемых другой выборки. Например, контрольная и экспериментальная группы в исследовании. Допускается, чтобы количество испытуемых в независимых выборках было различным [18].

Различия между зависимыми и независимыми выборками можно представить, используя следующую схему психологического исследования [13]:

Таблица 7.1

Схема психологического исследования

Экспериментальная группа	Контрольная группа
1. Начальный срез	2. Начальный срез
Экспериментальное воздействие есть	Экспериментального воздействия нет
3. Конечный срез	4. Конечный срез

Зависимыми выборками являются группы 1 и 3, а также 2 и 4; независимыми выборками – группы 1 и 2, а также группы 3 и 4.

3. Понятие о числе степеней свободы [13]

Для характеристики выборки используется показатель, зависящий от ее объема, который называется числом степеней свободы.

Число степеней свободы (ν или df) – это число данных из выборки, значения которых могут быть случайными.

Пусть мы имеем выборку x_1, x_2, \dots, x_n . Общей характеристикой выборки является сумма всех ее значений $x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Тогда каждое отдельное значение выборки x_i можно узнать, если от суммы всех значений отнять остальные $n - 1$ значения. Число $n - 1$ и является числом степеней свободы.

Например, известно, что два новорожденных весят в сумме 7,5 кг, а один из них 4 кг. Тогда вес второго уже определен весом первого ($7,5 - 4 = 3,5$), т.е. имеет одну степень свободы ($2 - 1 = 1$). Если три ребенка вместе весят 10,5 кг, то вес одного всегда точно определяется весом двух других, между которыми возможны вариации. В этом случае имеется две степени свободы ($3 - 1 = 2$) и т.д.

Число степеней свободы различно для зависимых и независимых выборок:

- для зависимых выборок объемом n число степеней свободы определяется по формуле $\nu = n - 1$;

- для независимых выборок объемами n_1 и n_2 число степеней свободы определяется по формуле $\nu = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 2$.

При использовании многомерных методов анализа данных (например, дисперсионный анализ) применяют более сложные подсчеты числа степеней свободы.

4. Уровень статистической значимости

Вопрос о принятии (отвержении) статистической гипотезы не может быть решен со стопроцентной уверенностью. Всегда допускается риск принятия неправильного решения. Риск, представленный как вероятность ошибочности статистической гипотезы, обозначается греческой буквой α и называется *уровнем значимости* принятия гипотез. Принимая или отклоняя гипотезу H_0 , можно допустить ошибки двух видов [4]:

– *ошибка I рода* состоит в том, что нулевая гипотеза H_0 отклоняется, в то время как она верна (т.е. различия признаются достоверными, в то время как они недостоверны). Вероятность ошибки I рода и есть уровень значимости α (или p);

– *ошибка II рода* заключается в том, что гипотеза H_0 принимается, в то время как она неверна (т.е. различия признаются недостоверными, в то время как они достоверны). Вероятность этой ошибки обозначают греческой буквой β .

Аналогично и правильные выводы относительно нулевой гипотезы H_0 также могут быть сделаны в двух случаях. Наглядно все варианты принятия и отвержения статистической гипотезы H_0 и их вероятность можно представить в виде таблицы [4, с. 258]:

Таблица 7.2

Варианты принимаемых решений при проверке статистических гипотез

Результат проверки гипотезы	Возможные состояния проверяемой гипотезы:	
	верна гипотеза H_0	верна гипотеза H_1
Гипотеза H_0 отклоняется	Ошибка I рода (вероятность равна α)	Правильное решение (вероятность равна $1 - \beta$)
Гипотеза H_0 принимается	Правильное решение (вероятность равна $1 - \alpha$)	Ошибка II рода (вероятность равна β)

Если вероятность ошибки при проверке нулевой гипотезы H_0 – это α , то вероятность правильного решения равна $1 - \alpha$. Величину $1 - \alpha$ называют доверительной вероятностью. Она задает доверительный интервал значений изучаемой выборочной статистики. Если выборочное значение попадает в этот интервал, то гипотеза H_0 не отклоняется [18].

Вероятность $1 - \beta$ называется мощностью метода (критерия) и определяет его способность отклонять нулевую гипотезу, когда она не верна (т.е. признать различия недостоверными, в то время как они достоверны). Понятие мощности критерия будет рассмотрено ниже.

Основной проблемой статистического вывода является установление оптимальной величины вероятности α , удовлетворяющей двум противоречивым требованиям. С одной стороны, величина α должна быть достаточно мала, т.к. чем

меньше α , тем больше вероятность правильного решения; с другой стороны, величина α должна быть достаточно велика, чтобы не допустить ошибки второго рода, т.к. при увеличении значения α вероятность β уменьшается.

В прикладных науках, в том числе в психологии, используются так называемые *стандартные* (пороговые или критические) величины ошибки первого рода $\alpha = 0,1; 0,05; 0,01; 0,001$ [18].

Традиционно при интерпретации различных уровней значимости, полученных на основе выборочных показаний об ошибочности статистической гипотезы (p – *уровень значимости*), исходят из величины $\alpha = 0,05$, реже $\alpha = 0,01$ (см. таблицу 7.3) [18, с. 105]:

Таблица 7.3

Интерпретация уровней значимости

Уровень значимости	Решение относительно нулевой гипотезы:	Возможный статистический вывод:
$p > 0,1$	принимается H_0	результаты статистически незначимы
$0,05 \leq p \leq 0,01$	сомнение в истинности H_0	результаты значимы на уровне тенденции
$p \leq 0,05$	значимость, отклонение H_0	результаты статистически значимы
$p \leq 0,01$	высокая значимость, отклонение H_0	результаты на уровне высокой статистической значимости

p -уровень значимости позволяет установить, с какой вероятностью (или в каком проценте случаев) все же возможна ошибка в тех выводах, которые делаются в оценке достоверности показателей или различий между какими-то величинами, полученными эмпирическим путем.

Когда говорят, что различия (или взаимосвязь) достоверны при $p \leq 0,05$ (или на 5%-ном уровне значимости), это означает, что имеется 5%-ная вероятность того, что они все-таки недостоверны, т.е. установленные различия (взаимосвязь) являются случайными, характерными только для данной выборки.

Аналогично, если различия достоверны при $p \leq 0,01$ (или на 1%-ном уровне значимости), то имеется 1%-ная вероятность их недостоверности, т.е. различия являются случайными, присущими только исследуемой выборке.

В современных статистических пакетах уровни значимости вычисляются непосредственно в процессе обработки эмпирических данных. Эти уровни, обозначаемые в разных пакетах различной аббревиатурой, могут иметь разное числовое выражение в интервале от 0 до 1. Например, $p\text{-level} = 0,5609$, или $p\text{-level} = 0,1678$, или $p\text{-level} = 0,0014$ (пакет STATISTICA). В первых двух случаях полученные уровни значимости велики (значительно превышают 5%) и не позволяют говорить о значимости результата. В то же время в последнем случае результат значим на уровне 0,0014, который является достоверным уровнем.

5. Статистические критерии и их характеристика

Проверка статистических гипотез осуществляется с помощью статистических критериев.

Статистический критерий – это решающее правило, обеспечивающее принятие истинной или отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью [30].

Статистические критерии обозначают также метод расчета определенного числа и само это число.

Статистический критерий имеет следующую структуру [18]:

- 1) формула расчета эмпирического значения критерия по исходным выборочным данным;
- 2) правило (формула) для определения числа степеней свободы;
- 3) теоретическое распределение случайной величины для заданного числа степеней свободы;
- 4) правило соотнесения эмпирического значения критерия с теоретическим распределением для подтверждения того, что гипотеза H_0 верна.

Одной из основных характеристик критерия является его мощность [27]. *Мощность статистического критерия* – это его способность не допустить ошибку второго рода, т.е. признать различия недостоверными, в то время как они достоверны. Мощность критерия определяется по формуле $1 - \beta$. Одни и те же задачи могут быть решены с помощью различных критериев, обладающих разной мощностью.

Статистические критерии делятся на параметрические и непараметрические [27].

Параметрические критерии включают в формулу расчета параметры распределения (среднее значение, дисперсию) и применяются при анализе метрических данных, вписывающихся в кривую нормального распределения, например, t-критерий Стьюдента.

Непараметрические критерии включают в формулу расчета частоты и ранги, при этом данные могут быть измерены в номинальной или ранговой шкале, например, G-критерий знаков. Непараметрические критерии могут быть применимы также для анализа метрических данных, распределение которых значительно отличается от нормального.

Параметрические и непараметрические критерии обладают разными возможностями и ограничениями [27, с. 28]:

Таблица 7.2

Возможности и ограничения параметрических и непараметрических критериев

<i>Параметрические критерии</i>	<i>Непараметрические критерии</i>
1) позволяют прямо оценить различия в средних значениях двух выборок;	1) позволяют оценить лишь средние тенденции, например, чаще ли в первой выборке встречаются более высокие, а во второй выборке более низкие значения;
2) позволяют прямо оценить различия в дисперсиях двух выборок;	2) позволяют оценить лишь различия в диапазоне вариативности признака;

<i>Параметрические критерии</i>	<i>Непараметрические критерии</i>
3) позволяют выявить тенденции изменения признака при переходе от условия к условию, если признак распределен нормально;	3) позволяют выявить тенденции изменения признака при переходе от условия к условию, при любом распределении признака;
4) позволяют оценить взаимодействие двух и более факторов в их влиянии на изменения признака;	4) эта возможность отсутствует;
5) эмпирические данные должны отвечать следующим условиям: - значения признака измерены по интервальной шкале; - распределение признака является нормальным; - равенство дисперсий в ячейках комплекса (для дисперсионного анализа);	5) эмпирические данные могут не отвечать ни одному из этих условий: - значения признака могут быть представлены в любой шкале; - распределение признака может быть любым; - требование равенства дисперсий отсутствует;
6) математические расчеты сложны;	6) математические расчеты, как правило, просты;
7) при выполнении условий, указанных в п.5, параметрические критерии оказываются наиболее мощными, чем непараметрические.	7) если условия п.5 не выполняются, непараметрические критерии оказываются более мощными.

Решение о выборе критерия зависит от следующих характеристик [9]:

- типа шкалы, в которой измерен исследуемый признак;
- характера распределения признака (нормальное или отличное от нормального);
- количества сравниваемых выборок и их объема;
- качества выборок (зависимые или независимые).

6. Общая схема проверки статистической гипотезы.

Принятие решения об отклонении (принятии) статистической гипотезы разбивается на семь этапов [9]:

- 1) формулировка нулевой и альтернативной гипотез;
- 2) выбор соответствующего уровня значимости (как правило, $p = 0,05$);
- 3) выбор статистического критерия, который определяется типом решаемой психологической задачи;
- 4) вычисление по экспериментальным данным эмпирического значения выбранного статистического критерия (ЭМП);
- 5) нахождение по статистическим таблицам критических значений (КР) для выбранного статистического метода, соответствующих уровню значимости $p = 0,05$ и $p = 0,01$ при заданном объеме выборки (числе степеней свободы);
- 6) сравнение вычисленного эмпирического и найденного критического значений;
- 7) выбор соответствующей статистической гипотезы.

При выборе гипотезы используется *правило отклонения H_0 (принятия H_1)* [18]:

- если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению или превышает его ($\text{ЭМП} \geq \text{КР}$) при уровне значимости $p \leq 0,05$, то H_0 отклоняется;

- если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению или превышает его ($\text{ЭМП} \geq \text{КР}$) при уровне значимости $p \leq 0,01$, то H_0 отклоняется и принимается H_1 .

Следует помнить, что у этого правила есть *исключения*, к которым относятся G -критерий знаков, T -критерий Вилкоксона и U -критерий Манна-Уитни. При их проверке устанавливаются обратные соотношения между эмпирическим и критическим значениями.

Для облегчения процесса принятия решения об отвержении (принятии) гипотез можно использовать *ось значимости* [27].

Пусть $g_{0,05} = 6$ – критическое значение некоторого статистического критерия при уровне значимости $p = 0,05$, $g_{0,01} = 9$ – критическое значение этого же критерия при уровне значимости $p = 0,1$, а $g_{\text{эмп}} = 8$ – вычисленное эмпирическое значение. Тогда графически соотношение этих значений можно представить следующим образом:



Рис. 7.1. Графическое представление оси значимости

Справа от критического значения $g_{0,01}$ располагаются эмпирические значения, превышающие его, т.е. безусловно значимые. Поэтому эту зону можно определить как *зону значимости*. Слева от критического значения $g_{0,05}$ располагаются эмпирические значения, которые ниже его, т.е. безусловно незначимые. Поэтому эту зону можно определить как *зону незначимости*. Эмпирическое значение критерия попало в область между $g_{0,05}$ и $g_{0,01}$. Это «зона неопределенности»: уже можно отклонить гипотезу о недостоверности различий (H_0), но еще нельзя принять гипотезу об их достоверности (H_1).

Однако на практике достоверными можно считать уже те различия, которые попали в зону неопределенности, указав, что они достоверны при $p \leq 0,05$, или указав точный уровень значимости полученного критерия, например $p = 0,02$.

Если по результатам статистической проверки нулевая гипотеза отклоняется, то принимается альтернативная гипотеза, которая может быть как направленной ($\bar{x}_1 > \bar{x}_2$), так и ненаправленной ($\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$). При проверке направленных и ненаправленных альтернатив уровень статистической значимости или критические значения критериев, определяются по-разному [18; 27].

При проверке ненаправленных статистических гипотез используется двусторонний критерий:

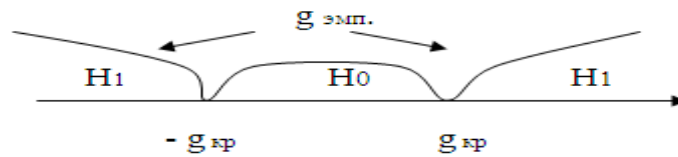


Рис. 7.2. Графическое представление оси значимости для двустороннего критерия

При проверке направленных статистических гипотез используется односторонний критерий:

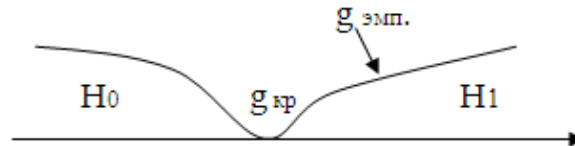


Рис. 7.3. Графическое представление оси значимости для одностороннего критерия

Двусторонний критерий более строг, поскольку он проверяет различия в обе стороны, поэтому нулевая гипотеза отвергается при больших значениях силы связи (корреляции, различий средних). Соотношение между уровнями значимости для направленных и ненаправленных гипотез таково: для одного и того же эмпирического значения уровень значимости p_1 для направленной альтернативы в два раза меньше уровня значимости p_2 для ненаправленной альтернативы: $p_2 = 2p_1$ [18].

То, какая альтернатива должна быть принята по результатам проверки, зависит от применяемого для проверки метода и теоретического распределения. Однако для обработки данных психологических исследований таблицы критических значений составлены таким образом, чтобы представленные в них значения соответствовали требованиям, предъявляемым к каждому виду статистических критериев [27].

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое гипотеза?
2. Дайте определение теоретической гипотезы. Какие виды теоретических гипотез выделяют?
3. Перечислите критерии правильно сформулированной гипотезы.
4. Дайте определение статистической гипотезы.
5. Что такое нулевая гипотеза? Приведите примеры.
6. Что такое альтернативная гипотеза? Приведите примеры.
7. Что такое ненаправленная гипотеза? Приведите примеры.
8. Что такое направленная гипотеза? Приведите примеры.
9. Какие выборки называют зависимыми? Приведите примеры.
10. Какие выборки называют независимыми? Приведите примеры.
11. Что такое число степеней свободы? Приведите примеры.
12. Как рассчитывается число степеней свободы в случае зависимых и независимых выборок?
13. Дайте определение уровня значимости. Какие уровни значимости используются в социальных науках?

14. Что характеризует доверительная вероятность?
15. Что при проверке статистической гипотезы называют ошибкой I рода? ошибкой II рода?
16. Что такое статистический критерий? Что включает в себя статистический критерий?
17. Дайте определение мощности статистического критерия.
18. Какие критерии называют параметрическими? непараметрическими?
19. Проведите сравнение параметрических и непараметрических критериев.
20. Чем определяется выбор статистического критерия?
21. Перечислите этапы проверки статистической гипотезы.
22. Сформулируйте правило отклонения нулевой гипотезы.
23. Как используется ось значимости при принятии (отвержении) статистической гипотезы?
24. В каком случае при проверке статистической гипотезы используется двусторонний критерий? односторонний критерий?

Тема 8 Корреляционный анализ

План:

1. Понятие о корреляции. Корреляционная связь и корреляционная зависимость.
2. Классификация корреляционных связей.
3. Наглядное представление корреляционных связей.
4. Меры связи для качественных переменных.
5. Меры связи для количественных переменных.
6. Причины низкой корреляции при наличии взаимосвязи между переменными.

Основные понятия и термины: функциональная связь, корреляционная связь, корреляционная зависимость, положительная корреляция, отрицательная корреляция, коэффициент корреляции, прямолинейная корреляционная связь, криволинейная корреляционная связь, сильная (средняя, умеренная, слабая) корреляционная связь, значимая корреляционная связь, диаграмма рассеяния, коэффициент ранговой корреляции Спирмена, коэффициент линейной корреляции Пирсона, ϕ -коэффициент сопряженности, таблицы сопряженности, рангово-бисериальный коэффициент корреляции, точечный бисериальный коэффициент корреляции, «ложная» корреляция, коэффициент частной корреляции.

1. Понятие о корреляции. Корреляционная связь и корреляционная зависимость

При проведении психологических исследований в ряде случаев важно знать, какова зависимость между изменением двух или более признаков; изме-

няются ли эти признаки самостоятельно, независимо друг от друга, или изменение одного признака связано с изменением другого.

Существует две категории связей между признаками: функциональные и корреляционные (статистические) [12].

При *функциональных связях* каждому значению одной переменной соответствует одно определенное значение другой переменной. Такие зависимости наблюдаются в точных науках (математике, физике). Например, между радиусом окружности R и ее длиной l существует функциональная зависимость $l = 2\pi R$, т.е. каждому значению R соответствует строго определенное значение l . Функциональная связь имеет место по отношению к каждому отдельному наблюдению. Корреляционная связь проявляется лишь в среднем для совокупности наблюдений.

При определении понятия «корреляция» (от лат. *correlation* – соотношение, связь, зависимость) используют термины «корреляционная связь» и «корреляционная зависимость». При этом в математической статистике сложилось два подхода.

В соответствии с первым подходом [8; 27] *корреляционная связь* рассматривается как согласованные изменения двух или нескольких признаков. Это означает, что изменчивость одного признака находится в некотором соответствии с изменчивостью другого, которое может быть обусловлено множеством различных причин, т.е. эти два признака зависят от некоторого третьего признака или сочетания признаков, не рассматриваемых в данном исследовании.

Например, исследуется взаимосвязь между курением (X) и низкими оценками у студентов (Y). Возможны следующие ситуации:

- никотин плохо влияет на деятельность мозга, в результате курящие студенты получают худшие оценки ($X \Rightarrow Y$);
- студенты, получающие худшие оценки, волнуются и поэтому больше курят ($Y \Rightarrow X$);
- хуже учатся и больше курят общительные студенты, которые любят общаться, развлекаться. Общительность (Z) мешает им учиться, и они чаще курят за компанию ($Z \Rightarrow X$ и Y).

Таким образом, корреляционная связь не рассматривается как причинно-следственная связь между признаками.

Корреляционная зависимость – это изменения, которые вносят значения одного признака в вероятность появления разных значений другого признака, т.е. это причинно-следственная связь. Например, связь между возрастом испытуемых и количеством воспроизводимых слов, которые предъявляют им для запоминания.

Представители второго подхода [12; 30] используют термины «корреляционная связь» и «корреляционная зависимость» как синонимы, не рассматривая их как причинно-следственную связь между исследуемыми признаками.

Учитывая, что термин «корреляционная зависимость» подразумевает влияние одной переменной на другую, исследователю корректнее использовать более нейтральный термин «корреляционная связь».

2. Классификация корреляционных связей

При изучении корреляции стараются установить, существует ли связь между двумя признаками, измеренными на одной выборке (например, уровнем интеллекта и успеваемостью школьников), или между признаками, измеренными на разных выборках (например, между уровнем интеллекта детей и образованием родителей). Если эта связь существует, то стремятся выяснить, как изменение одного признака связано с изменением другого.

Если при увеличении (уменьшении) одного признака X увеличивается (уменьшается) другой признак Y , то говорят о *положительной*, или *прямой*, корреляции ($X \uparrow \uparrow Y$ или $X \downarrow \downarrow Y$).

Если при увеличении одного признака X уменьшается другой признак Y , то говорят об *отрицательной* или *обратной корреляции* ($X \uparrow \downarrow Y$ или $X \downarrow \uparrow Y$).

В случае качественных признаков положительная корреляция обозначает, что присутствие одного признака совпадает с присутствием другого, а отрицательная корреляция – что присутствие одного признака совпадает с отсутствием другого.

Степень взаимосвязи между признаками и ее направление характеризует коэффициент корреляции, который обозначают r . *Коэффициент корреляции* – это величина, которая может варьироваться в пределах от -1 до $+1$, т.е.

$$-1 \leq r \leq +1.$$

Корреляционные связи можно классифицировать по различным основаниям (по направлению, по форме, по силе).

По направлению выделяют [27]:

- положительную корреляцию, если коэффициент корреляции имеет положительный знак: $0 < r \leq +1$;

- отрицательную корреляцию, если коэффициент корреляции имеет отрицательный знак: $-1 \leq r < 0$.

Корреляционные связи классифицируют также по форме. Выделяют два вида связей [27]:

- *прямолинейная корреляционная связь*, например связь между количеством тренировок на тренажере и количеством правильно решенных задач при контрольном тестировании. В этом случае графически связь можно представить в виде прямой линии (рис. 8.1):

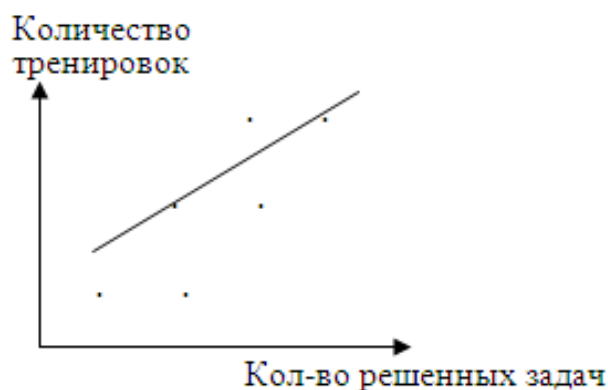


Рис. 8.1. Схема прямолинейной корреляционной связи

- *криволинейная корреляционная связь*, например связь между уровнем мотивации и эффективностью выполнения задачи (закон Йеркса-Додсона). В этом случае связь можно представить графически в виде кривой, которая вначале возрастает (до оптимального значения мотивации), а затем начинает убывать (рис. 8.2). Это означает, что при повышении мотивации эффективность выполнения задачи сначала возрастает, затем достигается максимальная эффективность выполнения задачи, соответствующая оптимальному значению мотивации, после чего дальнейшему повышению мотивации сопутствует снижение эффективности [27, с. 202].

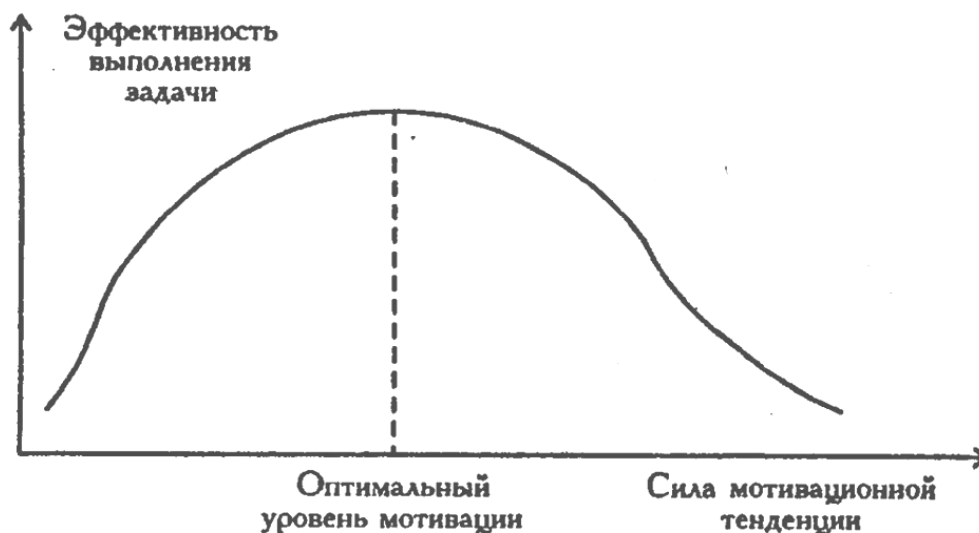


Рис. 8.2. Графическое представление криволинейной корреляционной связи

Корреляционные связи классифицируют *по силе (степени или тесноте)* [27]. При этом используют две системы классификаций – общую и частную.

Общая классификация корреляционных связей *по силе*:

- 1) $r < 0,19$ – очень слабая связь;
- 2) $0,20 < r < 0,29$ – слабая;
- 3) $0,30 < r < 0,49$ – умеренная;
- 4) $0,50 < r < 0,69$ – средняя;
- 5) $r > 0,70$ – сильная (тесная).

Сила связи не зависит от ее направленности и определяется по абсолютному значению коэффициента корреляции.

Например: а) взаимосвязь между количеством выкуриваемых сигарет и вероятностью заболеть раком легких $r = + 0,94$ – сильная положительная связь, т.е. чем больше сигарет человек выкуривает, тем больше у него шансов заболеть раком легких; б) взаимосвязь между количеством выкуриваемых сигарет и оценками у студентов $r = -0,8204$ – сильная отрицательная связь, т.е. чем больше сигарет выкуривает студент, тем ниже у него оценки [21].

Частная классификация корреляционных связей *по силе*:

- 1) высокая значимая корреляция – при r , соответствующем уровню статистической значимости $p \leq 0,01$;

2) значимая корреляция – при r , соответствующем уровню статистической значимости $p \leq 0,05$;

3) тенденция достоверной связи – при r , соответствующем уровню статистической значимости $p \leq 0,10$;

4) незначимая корреляция – при r , не достигающем уровня статистической значимости.

В этой классификации p – это уровень значимости, полученный при проверке нулевой гипотезы H_0 о равенстве нулю коэффициента корреляции между интересующими нас признаками в генеральной совокупности.

При этом может оказаться, что при малом объеме выборки сильная корреляция будет недостоверной, а при больших объемах выборки слабая корреляция – достоверной. Чем больше объем выборки, тем меньшей величины коэффициента корреляции оказывается достаточно, чтобы корреляция была признана достоверной.

В психологических исследованиях ориентируются на вторую классификацию, поскольку она учитывает объем выборки. Однако надо помнить, что сильная корреляция – это корреляция с коэффициентом корреляции $r > 0,70$, а не просто корреляция высокого уровня значимости.

Не имеет смысла анализировать статистически незначимую связь [18].

3. Наглядное представление корреляционных связей

Смысл корреляции можно проиллюстрировать графически с помощью *диаграммы рассеяния* (корреляционного поля). Для этого в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают значения одной из коррелирующих между собой переменных (X), по оси ординат – значения другой переменной (Y). Затем стоят точки с координатами $(x_i; y_i)$, где x_i и y_i – соответствующие значения коррелирующих переменных X и Y [8].

Пример 1[8]. По данным о среднем значении коэффициента IQ родителей (супружеской пары) и среднем значении коэффициента IQ их детей построить диаграмму рассеяния:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Среднее значение коэффициента IQ родителей (X)	125	120	110	105	105	95	95	90	80	75
Среднее значение коэффициента IQ детей (Y)	110	105	95	125	120	105	75	95	90	80

Решение. Построим систему координат. По оси абсцисс будем откладывать среднее значение коэффициента IQ родителей, по оси абсцисс – среднее значение коэффициента IQ детей. Построим точки с координатами $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_{10}; y_{10})$. Тогда первая точка будет иметь координаты (125, 110), вторая – (120, 105), и т.д.

В результате получим следующую диаграмму рассеяния (рис. 8.3), где каждая точка помечена числом, соответствующим порядковому номеру данных в таблице (при практическом построении диаграммы рассеяния точки обычно не нумеруют).

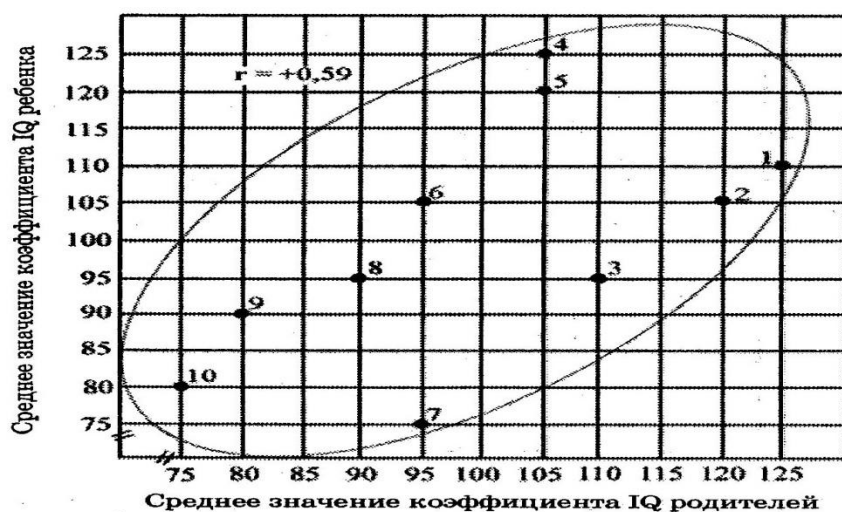


Рис. 8.3. Диаграмма рассеяния для данных примера 1

Представленные на диаграмме рассеяния данные могут быть вписаны в геометрическую фигуру, имеющую форму эллипса. По направлению его осей и форме можно судить о направлении и силе корреляционной связи между переменными [8]:

- если большая ось эллипса ориентирована в направлении с юго-запада на северо-восток, то это говорит о положительной корреляции; если же ось направлена с северо-запада на юго-восток – корреляция отрицательная;

- чем уже эллипс (т.е. чем меньше его малая ось при одной и той же величине большой оси), тем больше сила корреляционной связи. Если малая ось эллипса равна нулю, то эллипс превращается в отрезок, что соответствует полной корреляции ($r = \pm 1$). Если же большая ось эллипса становится равной малой оси, эллипс превращается в окружность, что свидетельствует об отсутствии корреляции ($r = 0$). Случаи, иллюстрирующие схематическое представление силы и направления корреляции, представлены на рис. 7.4 [8, с. 69]:

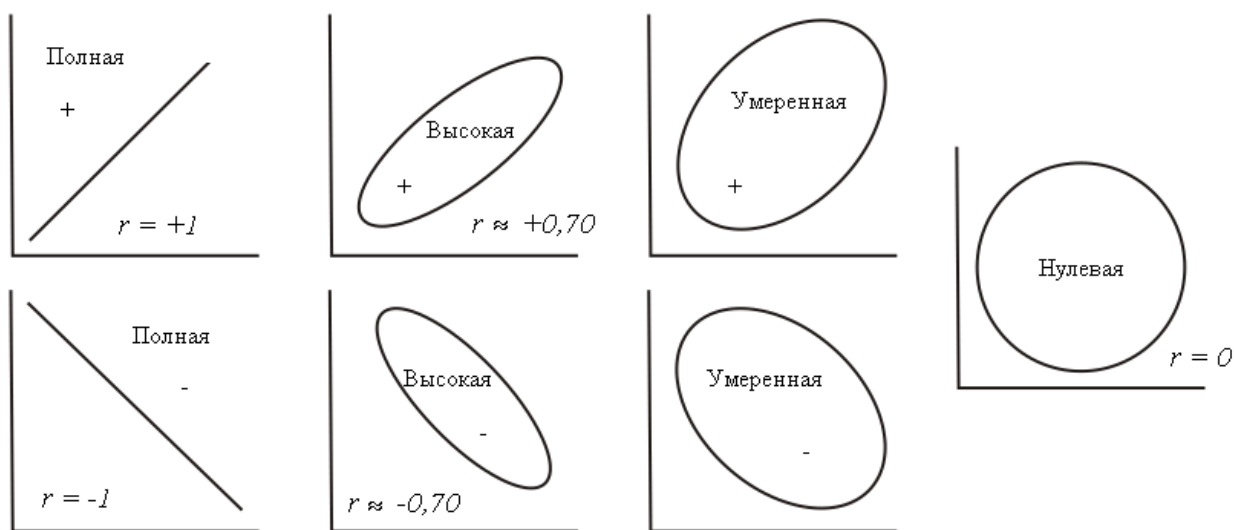


Рис. 8.4. Графическое представление корреляционных связей различной силы и направления

4. Меры связи для качественных переменных

Приемы для измерения меры корреляции различны для количественных и качественных переменных.

Для переменных, измеренных в номинальной или порядковой шкале, используются следующие эмпирические меры тесноты связи [27]:

- а) коэффициент ассоциации, или тетрафорический показатель связи;
- б) коэффициент взаимной сопряженности Пирсона и Чупрова;
- в) коэффициент Фехнера;
- г) коэффициент корреляции рангов Спирмена.

Первые три метода измерения меры корреляции могут быть заменены методами сопоставления и сравнения, которые обладают большими возможностями, дают основание для достоверных выводов и будут рассмотрены позже.

Для установления меры связи между качественными признаками чаще всего используют коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Основными характеристиками метода являются:

- универсальность, поскольку он применим к любым ранжированным или количественно измеренным данным;
- простота, т.к. позволяет проводить расчеты вручную;
- широкие возможности – позволяет сопоставлять не индивидуальные показатели, а индивидуальные иерархии (профили), что невозможно никакими другими способами.

Рассмотрим метод ранговой корреляции Спирмена [27].

Назначение. Позволяет определить силу и направление корреляционной связи между двумя признаками или между двумя иерархиями признаков.

Описание. Для подсчета ранговой корреляции необходимо иметь два ряда значений, которые могут быть проранжированы. Такими рядами могут быть:

- два признака, измеренные на одной и той же группе испытуемых; например коэффициент IQ и успеваемость у учащихся класса;
- две индивидуальные иерархии признаков, выявленные у двух испытуемых по одному и тому же набору признаков; например иерархия ценностей по методике Р. Рокича;
- две групповые иерархии признаков, при этом ранжируются среднегрупповые значения, полученные на двух группах испытуемых по одному и тому же набору признаков; например, групповые последовательности предпочтений при выборе из нескольких альтернатив;
- индивидуальная и групповая иерархия признаков, при этом ранжируются индивидуальные значения и среднегрупповые значения по тому же набору признаков, но при исключении этого отдельного испытуемого.

Ограничения:

- 1) данные получены в порядковой шкале, но могут быть измерены также в шкале интервалов или равных отношений, а затем проранжированы;
- 2) характер распределения переменных не имеет значения;
- 3) объем выборки удовлетворяет условию $5 < n \leq 40$;
- 4) при большом числе сопряженных рангов дает округленное значение.

Гипотезы:

H_0 : корреляция между переменными X и Y (между иерархиями X и Y) не отличается от нуля.

H_1 : корреляция между переменными X и Y (между иерархиями X и Y) достоверно отличается от нуля.

Алгоритм:

1. Определить, какие два признака или две иерархии признаков будут участвовать в сопоставлении, как X и Y , внести их в первый и второй столбец таблицы.

2. Проранжировать значения переменной X , начисляя ранг 1 наименьшему значению, в соответствии с правилами ранжирования. Занести ранги в третий столбец таблицы по порядку номеров испытуемых или признаков.

3. Проранжировать значения переменной Y по тем же правилам. Занести ранги в четвертый столбец таблицы по порядку номеров испытуемых или признаков.

4. Подсчитать разности d между рангами X и Y по каждой строке таблицы и занести их в пятый столбец.

5. Возвести каждую разность в квадрат: d^2 . Эти значения занести в шестой столбец таблицы.

6. Подсчитать сумму квадратов $\sum d^2$.

7. При наличии одинаковых рангов рассчитать поправки:

$$T_a = \frac{\sum (a^3 - a)}{12} \quad \text{и} \quad T_b = \frac{\sum (b^3 - b)}{12},$$

где a – объем каждой группы одинаковых рангов в ранговом ряду X ;

b – объем каждой группы одинаковых рангов в ранговом ряду Y .

8. Рассчитать коэффициент ранговой корреляции r_s по формуле:

а) при отсутствии одинаковых рангов:

$$r_s = 1 - \frac{6 \times \sum d^2}{n(n^2 - 1)};$$

б) при наличии одинаковых рангов:

$$r_s = 1 - \frac{6 \times \sum d^2 + T_a + T_b}{n(n^2 - 1)},$$

где n – количество ранжируемых испытуемых или признаков.

9. Определить по таблице критических значений для данного n и соответствующего уровня значимости p критическое значение коэффициента корреляции $r_{s \text{ кр.}}$ (Приложение 5). Если эмпирическое значение превышает критическое или равно ему ($r_s \geq r_{s \text{ кр.}}$), то корреляция достоверно отличается от нуля при соответствующем уровне значимости p .

Пример 2 [21]. Продавец мороженого интересуется, есть ли связь между температурой воздуха и количеством пачек мороженого, купленных у него в ларьке. Данные, собранные в течение недели, занесены в первые три столбца представленной ниже таблицы.

Решение. Определим, есть ли связь, с помощью коэффициента корреляции Спирмена.

Сформулируем статистические гипотезы.

H_0 : корреляция между температурой воздуха и количеством пачек мороженого, купленных в течение недели в ларьке, не отличается от нуля.

H_1 : корреляция между температурой воздуха и количеством пачек мороженого, купленных в течение недели в ларьке, достоверно отличается от нуля.

Построим таблицу для вычисления промежуточных значений:

Проранжируем данные по каждой переменной отдельно и занесем их в соответствующие столбцы таблицы.

Найдем разность рангов d и возведем каждое значение разности в квадрат.

Найдем сумму квадратов разностей рангов, сложив все числа в последнем столбце.

День недели	Температура воздуха, $^{\circ}\text{C}$ (X)	Количество купленных пачек мороженого (Y)	Ранг X	Ранг Y	Разность рангов d	Квадрат разности рангов d^2
Пн.	7	1	2	1	1	1
Вт.	4	3	1	2	-1	1
Ср.	13	5	4	3	1	1
Чт.	16	7	5	4	1	1
Пт.	10	9	3	5	-2	4
Сб.	22	11	7	6	1	1
Вс.	19	13	6	7	-1	1
					$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 10$

Поскольку связанных рангов нет, воспользуемся формулой

$$r_s = 1 - [6 \times \Sigma d^2 / n(n^2 - 1)].$$

Подставим полученные данные в формулу:

$$r_s = 1 - [6 \times 10 / 7(7^2 - 1)] = 1 - [60 / 7 \times 48] = 1 - 60 / 336 = 1 - 0,178 \approx 0,82.$$

Определим значимость коэффициента корреляции Спирмена, найдя $r_{s\text{кр}}$ с помощью таблицы критических значений:

$$r_{s\text{кр}} = \begin{cases} 0,78, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 0,94, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $r_s > r_{s\text{кр}}$ при уровне значимости $p \leq 0,05$. Следовательно, H_0 отвергается, H_1 – принимается, т.е. между температурой воздуха и количеством пачек мороженого, купленных в течение недели в ларьке, существует достоверная связь. Эта связь положительная ($r_s > 0$) и сильная ($r_s > 0,70$).

Показателем правильности вычисления разности рангов является сумма разности рангов, которая всегда должна быть равна нулю: $\Sigma d^2 = 0$.

Критерий Спирмена можно использовать и в случае, если число сравниваемых переменных $n > 40$. При этом критические значения определяются по таблице для критерия Пирсона при числе степеней свободы, равном n [9].

Расчет коэффициента корреляции рангов Спирмена удобно осуществлять с помощью статистических пакетов [10, с. 264–267].

5. Меры связи для количественных переменных

Для переменных, измеренных в метрических шкалах, используются следующие методы измерения меры корреляции [27]:

- линейный коэффициент корреляции Пирсона;
- корреляционное отношение η ;
- множественные коэффициенты корреляции.

Все эти методы являются параметрическими и предъявляют строгие требования к распределению признаков. Кроме того, корреляционное отношение η и множественные коэффициенты корреляции требуют трудоемких расчетов и, как правило, компьютерной обработки данных.

Для установления меры связи между количественными признаками чаще других используют коэффициент линейной корреляции Пирсона r_{xy} [9].

Назначение. Позволяет определить силу и направление корреляционной связи между двумя признаками.

Описание. Для подсчета линейной корреляции необходимо иметь два ряда значений, между которыми существует прямолинейная связь.

Для вычисления коэффициента линейной корреляции r_{xy} используются три метода:

1) метод «сырых» данных:

$$r_{xy} = \frac{n \times \sum x_i y_i - \sum x_i \times \sum y_i}{\sqrt{[n \times \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] \times [n \times \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}} ,$$

где x_i – значения переменной X , y_i – значения переменной Y , n – число пар данных (число испытуемых);

2) метод средних отклонений:

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \times (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \times \sum (y_i - \bar{y})^2}} ,$$

где \bar{x} – среднее значение переменной X , \bar{y} – среднее значение переменной Y ;

3) метод стандартных отклонений:

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n \times \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1) \times \sigma_x \cdot \sigma_y} ,$$

где σ_x – стандартное отклонение, вычисленное по переменной X , σ_y – стандартное отклонение, вычисленное по переменной Y .

Ограничения:

1) сравниваемые переменные должны быть измерены в шкале интервалов или равных отношений;

2) распределения признаков X и Y должны быть близки к нормальному;

3) оцениваются не менее пяти пар значений: $n \geq 5$;

4) коэффициент линейной корреляции нечувствителен к криволинейным связям.

Гипотезы:

H_0 : корреляция между переменными X и Y не отличается от нуля.

H_1 : корреляция между переменными X и Y достоверно отличается от нуля.

Алгоритм:

1. Выбрать метод расчета коэффициента линейной корреляции Пирсона r_{xy} .

2. Вычислить входящие в формулу величины, для удобства заноса промежуточные результаты в соответствующую таблицу.

3. Подставить данные в формулу и вычислить эмпирическое значение коэффициента линейной корреляции Пирсона r_{xy} .

4. Определить число степеней свободы по формуле $\nu = n - 2$.

5. По таблице критических значений для данного ν и соответствующего уровня значимости p определить критическое значение коэффициента корреляции $r_{xy\text{ кр}}$ (Приложение 6).

6. Сравнить эмпирическое и критическое значения критерия. Если эмпирическое значение превышает критическое или равно ему ($r_{xy} \geq r_{xy\text{ кр}}$), то корреляция достоверно отличается от нуля при уровне значимости p .

Пример 3 [21]. Продавец мороженого интересуется, есть ли связь между температурой воздуха и количеством пачек мороженого, купленных у него в ларьке. Данные, собранные в течение недели, занесены в первые три столбца представленной ниже таблицы.

Решение. Определим, есть ли связь, с помощью коэффициента линейной корреляции Пирсона. Воспользуемся методом сырых данных.

Сформулируем статистические гипотезы.

H_0 : корреляция между температурой воздуха и количеством пачек мороженого, купленных в течение недели в ларьке, не отличается от нуля.

H_1 : корреляция между температурой воздуха и количеством пачек мороженого, купленных в течение недели в ларьке, достоверно отличается от нуля.

Построим таблицу для вычисления промежуточных значений:

День недели	Температура воздуха, С° (X)	Количество пачек мороженого (Y)	x_i^2	y_i^2	$x_i^2 \times y_i^2$
Пн.	7	1	49	1	7
Вт.	4	3	16	9	12
Ср.	13	5	169	25	65
Чт.	16	7	256	49	112
Пт.	10	9	100	81	90
Сб.	22	11	484	121	242
Вс.	19	13	361	169	247
$n = 7$	$\Sigma x_i = 91$	$\Sigma y_i = 49$	$\Sigma x_i^2 = 1435$	$\Sigma y_i^2 = 455$	$\Sigma x_i^2 \times y_i^2 = 775$

Просуммировав цифры в каждом столбце таблицы, подставим полученные результаты в формулу

$$r_{xy} = [n \times \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \times \Sigma y_i] / [\sqrt{(n \times \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2) \times (n \times \Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2)}],$$
$$r_{xy} = [7 \times 775 - 49 \times 91] / [\sqrt{(7 \times 1435 - (91)^2) \times (7 \times 455 - (49)^2)}] = [5425 - 4459] / [\sqrt{(10045 - 8281) \times (3185 - 2401)}] = 966 / \sqrt{(1764 \times 784)} = 966 / 1176 \approx 0,82.$$

Определим число степеней свободы: $\nu = n - 2 = 7 - 2 = 5$.

Определим значимость коэффициента корреляции Пирсона, найдя $r_{xy\text{ кр}}$ с помощью таблицы критических значений:

$$r_{xy\text{ кр}} = \begin{cases} 0,754, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 0,874, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $r_{xy} > r_{xy\text{ кр}}$ при уровне значимости $p \leq 0,05$. Следовательно, H_0 отвергается, H_1 – принимается, т.е. между температурой воздуха и количеством пачек мороженого, купленных в течение недели в ларьке, существует достоверная положительная сильная связь.

Пример 4 [21]. Решить предыдущую задачу, воспользовавшись методом средних отклонений.

Решение. Чтобы воспользоваться методом средних отклонений, удобно заносить промежуточные результаты вычислений в другую таблицу.

День недели	Температура воздуха, С° (X)	Количество пачек мороженого (Y)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \times (y_i - \bar{y})$
Пн.	7	1	-6	36	-6	36	36
Вт.	4	3	-9	81	-4	16	36
Ср.	13	5	0	0	-2	4	0
Чт.	16	7	3	9	0	0	0
Пт.	10	9	-3	9	2	4	-6
Сб.	22	11	9	81	4	16	36
Вс.	19	13	6	36	6	36	36
$n = 7$	$\Sigma x_i = 91,$ $\bar{x} = 13$	$\Sigma y_i = 49,$ $\bar{y} = 7$		$\Sigma = 252$		$\Sigma = 112$	$\Sigma = 138$

Подставим полученные результаты в формулу

$$r_{xy} = [\Sigma(x_i - \bar{x}) \times \Sigma(y_i - \bar{y})] / [\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \times \Sigma(y_i - \bar{y})^2}] = 138 / \sqrt{(252) \times (112)} = 138 / 168 \approx 0,82.$$

Определение значимости коэффициента корреляции аналогично предыдущей задаче.

Расчет коэффициента корреляции Пирсона можно производить с помощью статистических пакетов [10, с. 229–236].

Частными случаями коэффициента линейной корреляции Пирсона являются ϕ -коэффициент сопряженности (или коэффициент ассоциации), рангово-бисериальный коэффициент корреляции r_{rb} , точечный бисериальный коэффициент корреляции r_{pb} . Рассмотрим их подробнее.

ϕ -коэффициент сопряженности (ассоциации) [9; 26].

Назначение. ϕ -коэффициент сопряженности используется для изучения связи двух бинарных переменных. Бинарная переменная имеет только две градации, обозначаемые как 0 и 1. Например, пол: мужской – 0, женский – 1; семейное положение: холост – 0, женат – 1.

Описание. Для вычисления ϕ -коэффициента сопряженности строят специальные таблицы, которые называют *таблицами сопряженности (таблицами кросстабуляции)*. Это таблицы совместного распределения частот двух и более номинальных признаков, измеренных на одной группе объектов. Столбцы такой таблицы соответствуют градациям одного номинального признака, а строки – градациям другого [18].

Для бинарных переменных таблица сопряженности 2×2 имеет следующий вид:

Значения признаков		Значения X		Итог
		0	1	
Значения Y	0	a	b	$a + b$
	1	c	d	$c + d$
Итог		$a + c$	$b + d$	n

где a – количество объектов, имеющих значение 0 по переменной X и значение 0 по переменной Y ; b – количество объектов, имеющих значение 1 по переменной X и значение 0 по переменной Y ; c – количество объектов, имеющих значение 0 по переменной X и значение 1 по переменной Y ; d – количество объектов, имеющих значение 1 по переменной X и значение 1 по переменной Y .

по переменной X и значение 1 по переменной Y ; d – количество объектов, имеющих значение 1 по переменной X и значение 1 по переменной Y ;

n – объем выборки.

Величина φ -коэффициента лежит в интервале +1 и -1, характеризуя направление и силу связи двух дихотомически измеренных признаков.

Ограничения:

1) сравниваемые переменные должны быть измерены в дихотомической шкале;

2) число варьирующих признаков в сопоставляемых переменных X и Y должно быть одинаково;

3) требуется приблизительное равенство количества значений 0 и 1 по каждой переменной.

Гипотезы:

H_0 : корреляция между переменными X и Y не отличается от нуля.

H_1 : корреляция между переменными X и Y достоверно отличается от нуля.

Алгоритм:

1. На основе эмпирических данных строят таблицу сопряженности.

2. Вычисляют эмпирическое значение φ -коэффициента сопряженности по формуле

$$\varphi = \frac{bc - ad}{(a + c) \times (b + d) \times (a + b) \times (c + d)}.$$

3. Поскольку для этого коэффициента корреляции нет стандартных таблиц критических значений, то их рассчитывают с помощью t -критерия Стьюдента по формуле

$$T_{\varphi} = |r_{\text{эм}}| \times \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{\text{эм}}^2}},$$

где $r_{\text{эм}}$ – вычисленный коэффициент корреляции; n – число значений, принимаемых коррелируемыми признаками.

4. Проверяют величину T_{φ} на уровень значимости по таблице критических значений для критерия Стьюдента (Приложение 7). Число степеней свободы при этом определяется по формуле $\nu = n - 2$. Если $T_{\varphi} \geq t_{\text{кр}}$, то H_0 отвергается.

Пример 5 [9]. Влияет ли семейное положение (переменная X) на успешность обучения в вузе (переменная Y), если известны семейное положение и успешность обучения 12 студентов-юношей.

Решение. Переменная X принимает два значения: 0 – холост, 1 – женат. Переменная Y также является бинарной: 0 – успешно учится, 1 – имеет академические задолженности. Представим данные в виде таблицы:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
Y	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1

Сформулируем статистические гипотезы.

H_0 : корреляция между семейным положением студентов-юношей и успешностью обучения в вузе не отличается от нуля.

H_1 : корреляция между семейным положением студентов-юношей и успешностью обучения в вузе достоверно отличается от нуля.

Чтобы воспользоваться φ -коэффициентом, построим таблицу сопряженности по данным задачи:

Значения признаков		Значения X		Итог
		0	1	
Значения Y	0	$a = 2$	$b = 4$	6
	1	$c = 5$	$d = 1$	6
Итог		7	5	12

Воспользуемся формулой расчета φ -коэффициента сопряженности по таблице сопряженности:

$$\varphi = [b \times c - a \times d] / \sqrt{[(a + c) \times (b + d) \times (a + b) \times (c + d)]} = [4 \times 5 - 2 \times 1] / \sqrt{[7 \times 5 \times 6 \times 6]} = [20 - 2] / \sqrt{[7 \times 5 \times 6 \times 6]} = 18 / \sqrt{1260} \approx 18 / 35,49 \approx 0,508.$$

Рассчитаем значимость полученного коэффициента корреляции по формуле

$$T_{\varphi} = |r_{\text{эм}}| \times \sqrt{[(n - 2) / (1 - r_{\text{эм}}^2)]} = |0,508| \times \sqrt{[(12 - 2) / (1 - 0,508^2)]} = 0,508 \times \sqrt{[10 / 0,742]} \approx 0,508 \times \sqrt{13,48} \approx 0,508 \times 3,67 \approx 1,87.$$

Число степеней свободы будет равно $\nu = n - 2 = 12 - 2 = 10$.

По таблице критических значений для критерия Стьюдента при $\nu = 10$ находим

$$t_{\text{кр}} = \begin{matrix} 2,23, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 3,17, & \text{при } p \leq 0,01. \end{matrix}$$

Вычисленное значение T_{φ} оказалось меньше критического $t_{\text{кр}}$, т.е. принимается H_0 . Не существует достоверной взаимосвязи между семейным положением студентов-юношей и успешностью обучения в вузе.

Анализ взаимосвязи признаков, измеренных в номинальной шкале, может проводиться и в том случае, если каждый из них имеет более чем два уровня. Для таблиц сопряженности размером больше чем 2×2 можно только констатировать факт наличия (отсутствия) связи и ничего нельзя сказать о степени взаимосвязи. Формула для вычисления приобретает более сложный вид [26].

Рангово-бисериальный коэффициент корреляции r_{rb} [9].

Назначение. Рангово-бисериальный коэффициент корреляции r_{rb} используется для вычисления взаимосвязи между двумя переменными, одна из которых измерена в номинальной дихотомической шкале (0 или 1), а вторая – в ранговой шкале.

Описание. Этот коэффициент корреляции называется бисериальным, поскольку имеется две серии объектов: для одной серии значения номинальной переменной X равны 1, а для другой – 0. Величина коэффициента корреляции r_{rb} лежит в интервале +1 и –1, но его знак для интерпретации результатов не имеет значения (это исключение из общего правила).

Ограничения:

1) сравниваемые переменные должны быть измерены в разных шкалах: одна (X) – в дихотомической шкале, другая (Y) – в ранговой;

2) число варьирующих признаков в сопоставляемых переменных X и Y должно быть одинаковым.

Алгоритм:

1. Вычислить величину y_1 – среднее значение по переменной Y для объектов, у которых переменная $X = 1$.

2. Вычислить величину y_0 – среднее значение по переменной Y для объектов, у которых переменная $X = 0$.

3. Рассчитать эмпирическое значение рангово-бисериального коэффициента корреляции r_{rb} по формуле

$$r_{rb} = \frac{2}{n} \times (y_{.1} - y_{.0}), \text{ где } n - \text{общее количество объектов.}$$

4. Вычислить критическое значение для рангово-бисериального коэффициента корреляции r_{rb} с помощью t -критерия Стьюдента по формуле

$$T_{\phi} = |r_{эм}| \times \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{эм}^2}},$$

где $r_{эм}$ – вычисленный коэффициент корреляции; n – число пар коррелируемых признаков.

5. Определить уровень значимости для величины T_{ϕ} по таблице критических значений для критерия Стьюдента (число степеней свободы определяется по формуле $\nu = n - 2$) (Приложение 7). Если $T_{\phi} \geq t_{кр}$, то H_0 отвергается.

Пример 6 [9]. Установить, существует ли взаимосвязь между полом 10 школьников и рангом их вербальных способностей.

Решение. Пусть переменная X – это пол (1 – мальчик, 0 – девочка), а переменная Y – это ранг роста школьников. Представим результаты исследования в виде таблицы:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
Y	1	10	2	9	5	8	4	7	3	6

Сформулируем статистические гипотезы.

H_0 : корреляция между полом школьников и выраженностью их вербальных способностей достоверно не отличается от нуля.

H_1 : корреляция между полом школьников и выраженностью их вербальных способностей достоверно отличается от нуля.

Воспользуемся формулой для вычисления рангово-бисериального коэффициента корреляции r_{rb} , поскольку одна переменная измерена в номинальной дихотомической шкале, а другая – в ранговой:

$$r_{rb} = 2/n \times (y_1 - y_0).$$

Из условия следует, что $n = 10$.

Вычислим неизвестные величины:

$$y_1 = (10 + 9 + 4 + 7) : 4 = 7,5; \quad y_0 = (1 + 2 + 5 + 8 + 3 + 6) : 6 = 4,167.$$

$$\text{Тогда } r_{rb} = 2/10 \times (7,5 - 4,167) = 0,2 \times 3,33 \approx 0,67.$$

Рассчитаем значимость полученного коэффициента корреляции по формуле

$$T_{\phi} = |r_{rb}| \times \sqrt{(n-2)/(1-r_{rb}^2)} = |0,67| \times \sqrt{(10-2)/(1-0,67^2)} = 0,67 \times \sqrt{8/0,55} \approx 0,67 \times \sqrt{14,54} \approx 0,67 \times 3,8 \approx 2,56.$$

Число степеней свободы будет равно $\nu = n - 2 = 10 - 2 = 8$.

По таблице критических значений для критерия Стьюдента при $\nu = 8$ находим

$$t_{кр} = \begin{cases} 2,31, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 3,36, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Так как вычисленное значение T_ϕ оказалось больше критического $t_{кр}$ при уровне значимости $p \leq 0,05$, то H_0 отвергается и принимается H_1 . Существует достоверная взаимосвязь между полом подростков и степенью выраженности их вербальных способностей. Направление связи рангово-бисериальный коэффициент корреляции r_{rb} установить не позволяет.

Точечный бисериальный коэффициент корреляции r_{pb} [9].

Назначение. Используется для вычисления взаимосвязи между двумя переменными, одна из которых измерена в номинальной дихотомической шкале (0 или 1), а вторая – в количественной шкале.

Описание. Как и в предыдущем случае, величина коэффициента корреляции r_{pb} лежит в интервале +1 и –1, но его знак не влияет на интерпретацию результатов (это второе исключение из общего правила).

Ограничения:

- 1) сравниваемые переменные должны быть измерены в разных шкалах: одна (X) – в дихотомической шкале, другая (Y) – в шкале интервалов или отношений;
- 2) предполагается, что переменная Y имеет нормальный закон распределения;
- 3) число варьирующих признаков в сопоставляемых переменных X и Y должно быть одинаковым.

Алгоритм:

1. Определить n_1 – количество объектов, для которых $X = 1$ и вычислить величину y_1 – среднее значение по переменной Y для этих объектов.
2. Определить n_0 – количество объектов, для которых $X = 0$ и вычислить величину y_0 – среднее значение по переменной Y этих объектов.
3. Вычислить σ_y – стандартное отклонение для значений по переменной Y .
4. Рассчитать эмпирическое значение точечного бисериального коэффициента корреляции r_{rb} по формуле

$$r_{pb} = \frac{\bar{y}_{\cdot 1} - \bar{y}_{\cdot 0}}{\sigma_y} \times \sqrt{\frac{n_1 \times n_0}{n(n-1)}},$$

где n – общее количество объектов, т.е. $n = n_{\cdot 1} + n_{\cdot 0}$.

5. Вычислить критическое значение для точечного бисериального коэффициента корреляции r_{pb} с помощью t -критерия Стьюдента по формуле

$$T_\phi = |r_{\phi mn}| \times \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{\phi mn}^2}},$$

где $r_{\phi mn}$ – вычисленный коэффициент корреляции; n – число пар коррелируемых признаков.

6. Определить уровень значимости для величины T_ϕ по таблице критических значений для критерия Стьюдента (число степеней свободы определяется по формуле $\nu = n - 2$) (Приложение 7). Если $T_\phi \geq t_{кр}$, то H_0 отвергается.

Пример 7 [9]. Установить, существует ли взаимосвязь между полом 15 школьников и их ростом, измеренным в сантиметрах.

Решение. Пусть переменная X – это пол (1 – мальчик, 0 – девочка), а переменная Y – это рост (в см). Представим результаты исследования в виде таблицы:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
Y	150	170	160	165	140	183	157	152	163	168	180	155	157	160	152

Сформулируем статистические гипотезы.

H_0 : корреляция между полом школьников и их ростом достоверно не отличается от нуля.

H_1 : корреляция между полом школьников и их ростом достоверно отличается от нуля.

Воспользуемся формулой для вычисления точечного бисериального коэффициента корреляции r_{pb} , поскольку одна переменная измерена в номинальной дихотомической шкале, а другая – в количественной:

$$r_{pb} = (\bar{y}_{\cdot 1} - \bar{y}_{\cdot 0}) / \sigma_y \times \sqrt{[(n_1 \times n_0) / n(n-1)]}.$$

Из условия следует, что $n = 15$, $n_1 = 8$, $n_0 = 7$.

Вычислим неизвестные величины:

$$\bar{y}_{\cdot 1} = (150 + 160 + 165 + 183 + 163 + 168 + 180 + 157) : 8 = 163,25;$$

$$\bar{y}_{\cdot 0} = (170 + 140 + 157 + 152 + 155 + 160 + 152) : 7 = 156,57.$$

Не приводим расчетов для вычисления стандартного отклонения по переменной Y: $\sigma_y = 8,94$.

$$\text{Тогда } r_{pb} = (163,25 - 156,57) / 8,94 \times \sqrt{[(8 \times 7) / 15(15 - 1)]} = 0,41.$$

Рассчитаем значимость полученного коэффициента корреляции по формуле

$$T_{\phi} = |r_{эмп}| \times \sqrt{[(n-2)/(1-r_{эмп}^2)]} = |0,41| \times \sqrt{[(15-2)/(1-0,41^2)]} = 0,41 \times \sqrt{[13/0,832]} \approx 0,41 \times \sqrt{15,625} \approx 0,41 \times 3,95 \approx 1,62.$$

Число степеней свободы будет равно $\nu = n - 2 = 15 - 2 = 13$.

По таблице критических значений для t -критерия Стьюдента при $\nu = 13$ находим

$$t_{кр} = \begin{cases} 2,16, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 3,01, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Так как вычисленное значение T_{ϕ} оказалось меньше критического $t_{кр}$, то принимается H_0 . Не существует достоверной взаимосвязи между полом подростков и их ростом.

Расчет точечного бисериального коэффициента корреляции r_{pb} можно производить с помощью статистических пакетов [10, с. 240–242].

Не разработано специального коэффициента корреляции для оценки взаимосвязи между переменными, одна из которых измерена в порядковой шкале, а другая – в количественной. В этом случае рекомендуется преобразовать количественные данные в порядковую шкалу (т.е. проранжировать их), а затем воспользоваться коэффициентом ранговой корреляции Спирмена. Алгоритм выбора меры взаимосвязи переменных представлен в таблице [14; 26].

Таблица 8.1

Алгоритм выбора необходимого коэффициента корреляции

X \ Y	Номинальная дихотомическая шкала	Ранговая (порядковая) шкала	Количественная шкала
Номинальная дихотомическая шкала	ϕ -коэффициент сопряженности	r_{rb} – рангово- бисериальный коэффициент корреляции	r_{pb} – точечный бисериальный коэффициент корреляции
Ранговая (порядковая) шкала	r_{rb} – рангово- бисериальный коэффициент корреляции	r_s – коэффициент ранговой корреляции Спирмена	воспользоваться коэффициентом r_s , предварительно проранжировав количественные данные

$X \backslash Y$	Номинальная дихотомическая шкала	Ранговая (порядковая) шкала	Количественная шкала
Количественная шкала	r_{pb} – точечный бисериальный коэффициент корреляции	воспользоваться коэффициентом r_s , предварительно проранжировав количественные данные	r_{xy} – коэффициент линейной корреляции Пирсона

6. Причины низкой корреляции при наличии взаимосвязи между переменными

Следует помнить, что наличие низкого коэффициента корреляции между переменными не гарантирует отсутствия связи между ними. Существует четыре причины низкой корреляции при наличии причинной связи между переменными [18; 21]:

1. Связь между переменными не линейна, коэффициент корреляции r низкий. Особенно часто это наблюдается при вычислении коэффициента линейной корреляции Пирсона r_{xy} . Выход – построить диаграмму рассеяния и по ней найти точку перегиба. Разбить выборку на две группы, различающиеся по направлению связи.

2. Наличие выбросов – слишком больших и слишком маленьких значений. На диаграмме рассеяния выбросы значительно выходят за пределы эллипса. Они могут изменить знак корреляции на противоположный либо обусловить наличие «ложной» корреляции (см. случай 3.1). Выход: а) использовать ранговую корреляцию, которая менее чувствительна к выбросам; б) провести чистку данных, ограничив диапазон изменчивости до $\bar{x} \pm 2\sigma$. Вообще говоря, если распределение хотя бы одной переменной асимметрично, лучше перейти к рангам.

3. Влияние третьей, неучтенной переменной Z , которая мешает проявиться взаимосвязи переменных X и Y . При этом возможны два случая:

3.1. Эта третья переменная Z измеряется в номинальной шкале, что проявляется в неоднородности выборки (например, испытуемые – мужчины и женщины). Выход – нужно вычислить корреляцию не только внутри всей выборки, но и внутри каждой группы. Например, связь между ростом людей и длиной их волос – значимая отрицательная. Но построение диаграммы рассеяния с выделением двух групп (мужчины и женщины) говорит о том, что отдельно для мужчин и отдельно для женщин корреляция близка к нулю, т.е. наблюдается *ложная корреляция*.

3.2. Эта третья переменная Z представлена в количественной шкале. Например, существует корреляция между ростом и скоростью чтения у младших школьников. Переменная Z – возраст детей. Выход – вычислить *коэффициент частной корреляции* r_{xy-z} по формуле

$$r_{xy-z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \times r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}},$$

где r_{xy} , r_{xz} и r_{yz} – коэффициенты линейной корреляции Пирсона, вычисленные между соответствующими переменными.

Если коэффициент частной корреляции $r_{xy \cdot z}$ существенно меньше линейного коэффициента корреляции r_{xy} , то весьма вероятно, что именно третья, неучтенная переменная Z является причиной корреляции переменных X и Y .

Для оценки уровня достоверности частного коэффициента корреляции следует пользоваться формулой $T_\phi = |r_{\text{эм}}| \times \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{\text{эм}}^2}}$ и таблицей критических значений для t -критерия Стьюдента при $\nu = n - 2$.

Расчет частного коэффициента корреляции удобно осуществлять с помощью статистических пакетов [10, с. 256–259].

4. Ограниченный интервал данных. Для вычисления коэффициента корреляции нужно иметь достаточно большой диапазон значений. Если это условие не выполняется, то корреляция будет низкой. Это хорошо представляет диаграмма рассеяния (рис. 8.5) [21, с. 61].

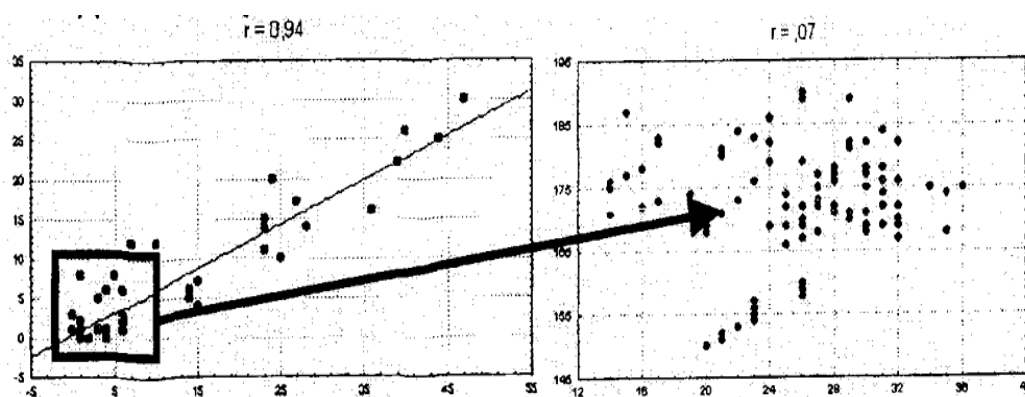


Рис. 8.5. Исчезновение наблюдаемой зависимости при ограничении интервала данных

Выход из этой ситуации – увеличить диапазон значений переменных.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие виды зависимостей между признаками можно выделить?
2. Чем статистическая зависимость отличается от функциональной?
3. Что такое корреляционная связь?
4. Что такое корреляционная зависимость?
5. Дайте определение положительной корреляции; отрицательной корреляции.
6. Что характеризует коэффициент корреляции?
7. Дайте общую классификацию корреляционных связей по силе. Приведите примеры.
8. Дайте частную классификацию корреляционных связей по силе. Приведите примеры.
9. Дайте классификацию корреляционных связей по направлению. Приведите примеры.
10. Что такое диаграмма рассеяния? Как ее построить?
11. Представьте графически различные виды корреляционных связей.

12. Какие меры связи используют для качественных данных?
13. Представьте ограничения и алгоритм вычисления коэффициента ранговой корреляции Спирмена.
14. Какие меры связи используют для количественных данных?
15. Представьте ограничения и методы вычисления коэффициента линейной корреляции Пирсона.
16. Какой критерий используется для вычисления корреляционной связи между переменными, измеренными в номинальной шкале? Как он рассчитывается?
17. Какой критерий используется для вычисления корреляционной связи между переменными, одна из которых измерена в номинальной шкале, а другая – в ранговой? Как он рассчитывается?
18. Какой критерий используется для вычисления корреляционной связи между переменными, одна из которых измерена в номинальной шкале, а другая – в ранговой? Как он рассчитывается?
19. Какой критерий используется для вычисления корреляционной связи между переменными, одна из которых измерена в номинальной шкале, а другая – в количественной? Как он рассчитывается?
20. Представьте алгоритм выбора необходимого коэффициента корреляции.
21. Перечислите причины низкой корреляции между переменными при наличии между ними взаимосвязи.
22. Что такое «ложная» корреляция? Приведите примеры.
23. Как рассчитывается коэффициент частной корреляции?

Тема 9 Регрессионный анализ

План:

1. Понятие о регрессии. Линия регрессии.
2. Линейный регрессионный анализ.
3. Оценка точности прогноза.
4. Понятие о множественной линейной регрессии. Нелинейная регрессия.

Основные понятия и термины: регрессия, фактор (предиктор), отклик, линия регрессии, уравнение регрессии, коэффициент регрессии, линейный регрессионный анализ, метод наименьших квадратов, ошибка оценки, дисперсия ошибки оценки, стандартная ошибка оценки, коэффициент детерминации, множественная линейная регрессия, нелинейная регрессия.

1. Понятие о регрессии. Линия регрессии

Корреляционный анализ позволяет судить о степени взаимосвязи между двумя переменными X и Y . Эту связь можно описать с помощью различных коэффициентов корреляции (ранговых, линейных, частных и т.д.). В то же время

связь между переменными иногда можно выразить как зависимость между аргументом (независимой переменной) и функцией (зависимой переменной), т.е. как функциональную зависимость: $Y = F(X)$. При этом изменение функции в зависимости от изменения аргумента (или нескольких аргументов) называется *регрессией* [9].

Регрессия позволяет установить, как изменяется зависимая переменная при изменении независимой переменной на единицу меры, т.е. дает возможность осуществлять прогнозирование изменения зависимой переменной. Независимую переменную X называют *фактором* (или *предиктором*), а зависимую переменную Y – *откликом*.

Поскольку переменных величин две, то регрессия является двусторонней: она позволяет установить, как изменяется величина Y при изменении переменной X на единицу меры $Y = F(X)$, а также как изменяется величина X при изменении переменной Y на единицу меры $X = F(Y)$.

Для применения регрессии необходимо, чтобы выполнялись следующие условия [9]:

- 1) переменные X и Y должны быть измерены в шкале интервалов или равных отношений;
- 2) переменные X и Y должны иметь нормальный закон распределения;
- 3) число варьирующих признаков в сравниваемых переменных должно быть одинаковым.

В отличие от корреляционного анализа степень и характер регрессии можно установить и для небольшого количества пар признаков.

Графическое представление регрессионной зависимости $Y = F(X)$ называют *линией регрессии*. Это прямая, которая выражает наилучшее предсказание зависимой переменной (Y) по независимой переменной (X).

Регрессию выражают с помощью двух *уравнений регрессии*, которые в случае, если рассматривается один аргумент, выглядят следующим образом:

$$Y = a_0 + a_1 \times X,$$

где Y – зависимая переменная; X – независимая переменная, a_0 – свободный член, a_1 – *коэффициент регрессии*, или *угловой коэффициент*, определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям координат;

$$\text{или } X = b_0 + b_1 \times Y,$$

где X – зависимая переменная; Y – независимая переменная, b_0 – свободный член, b_1 – коэффициент регрессии (угловой коэффициент), определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям координат.

Графически соотношение линий регрессии представлено на рис. 8.1 [9, с. 256].

Линии регрессии пересекаются в точке $O(\bar{x}, \bar{y})$, где \bar{x} и \bar{y} – средние арифметические значения корреляционно связанных между собой переменных X и Y . Линия AB , проходящая через точку O , соответствует линейной функциональной зависимости между переменными X и Y , когда $r_{xy} = 1$. Чем сильнее связь между X и Y , тем ближе обе линии регрессии к прямой AB , и наоборот, чем сла-

бее связь между этими переменными, тем больше линии регрессии отклоняются от прямой AB . При отсутствии связи между X и Y ($r_{xy} = 0$) линии регрессии пересекаются под прямым углом.

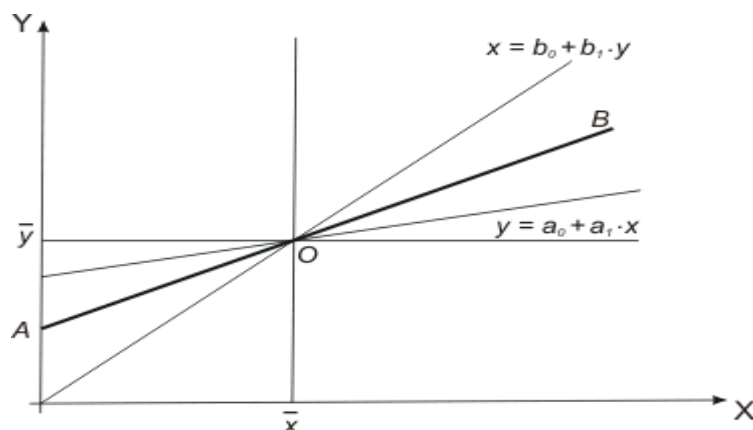


Рис. 9.1. Графики линий регрессии

2. Линейный регрессионный анализ

Количественное представление связи между переменными X и Y (между Y и X) называется *линейным регрессионным анализом*. Главной задачей линейного регрессионного анализа является нахождение коэффициентов a_0 , b_0 , a_1 и b_1 , а также определение уровня значимости уравнений регрессии [9].

Зная значения исследуемых признаков, можно определить величину свободных членов и коэффициентов регрессии. Коэффициенты регрессии a_1 и b_1 определяются по следующим формулам:

$$a_1 = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \text{и} \quad b_1 = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y},$$

где r_{xy} – коэффициент линейной корреляции между переменными X и Y , σ_x – среднее квадратическое отклонение, подсчитанное для переменной X , σ_y – среднее квадратическое отклонение, подсчитанное для переменной Y .

Как и коэффициенты корреляции, коэффициенты регрессии характеризуют только линейную связь и при положительной связи имеют знак «+», а при отрицательной – «-».

Для вычисления свободных членов можно воспользоваться следующими формулами:

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \times \bar{x}, \quad b_0 = \bar{x} - b_1 \times \bar{y},$$

где \bar{x} – среднее значение, вычисленное по переменной X , \bar{y} – среднее значение, вычисленное по переменной Y .

В случае если коэффициент корреляции неизвестен, для расчетов коэффициентов регрессии и свободных членов используются другие формулы [9].

Необходимо отметить, что между величинами r_{xy} , a_1 и b_1 существует взаимосвязь, которая выражается следующей формулой:

$$r_{xy} = \sqrt{a_1 b_1},$$

т.е. коэффициент корреляции представляет собой среднее геометрическое из коэффициентов регрессии признаков. Эта формула позволяет по известным значениям коэффициентов регрессии вычислить коэффициент корреляции.

Линейная регрессия может быть задана несколькими способами:

- 1) путем расчетов коэффициентов регрессии a_1 и b_1 ;
- 2) путем составления уравнений регрессии и описания теоретических линий регрессии: $Y = a_0 + a_1 \times X$ или $X = b_0 + b_1 \times Y$;
- 3) путем построения эмпирических линий регрессии.

Пример 1 [13]. Вывести формулу линейной регрессии для следующих данных, полученных в результате исследования зависимости успешности профессиональной деятельности (Y) от уровня сформированности эмпатии (X) (анализировались лица одного пола). Построить линию регрессии:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Среднее значение	Стандартное отклонение
X	9	7	5	6	6	3	6	8	3	4	5,7	2
Y	31	15	22	18	24	19	14	27	25	13	20,8	6
$X \cdot Y$	279	105	110	108	144	57	84	216	75	52		

Решение: по данным исследования нетрудно рассчитать среднее значение и стандартное отклонение по каждой переменной, а также сумму произведений соответствующих значений переменных:

$$\bar{x} = 5,7 \text{ и } \sigma_x = 2;$$

$$\bar{y} = 20,8 \text{ и } \sigma_y = 6;$$

$$\sum x_i y_i = 1230.$$

Воспользуемся методом стандартных отклонений для вычисления коэффициента линейной корреляции между переменными X и Y :

$$r_{xy} = [\sum x_i y_i - n \times \bar{x} \cdot \bar{y}] / (n - 1) \times \sigma_x \cdot \sigma_y = [1230 - 10 \times 5,7 \cdot 20,8] / [(10 - 1) \times 2 \cdot 6] =$$

$$= [1230 - 1185,6] / [9 \times 12] = 44,4 / 108 = 0,41.$$

В результате расчетов получим $r_{xy} = 0,41$.

$$\text{Тогда } a_1 = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,41 \times 6 : 2 = 1,23.$$

Для вычисления a_0 воспользуемся формулой $a_0 = \bar{y} - a_1 \times \bar{x}$.

$$\text{Тогда } a_0 = 20,8 - 1,23 \times 5,7 = 13,79.$$

Уравнение регрессии будет иметь вид: $Y = 13,79 + 1,23 \cdot X$.

Представим результаты анализа графически. Для этого построим диаграмму рассеяния и эмпирическую линию регрессии по данным исследования.

Для построения линии регрессии определим координаты двух точек с помощью уравнения регрессии:

x	2	6
y	16,25	21,17

Для $x = 2$, $y = 13,79 + 1,23 \cdot 2 = 16,25$, для $x = 6$, $y = 13,79 + 1,23 \cdot 6 = 21,17$.

Построим диаграмму рассеяния и линию регрессии (рис. 9.2) [13, с. 57]:

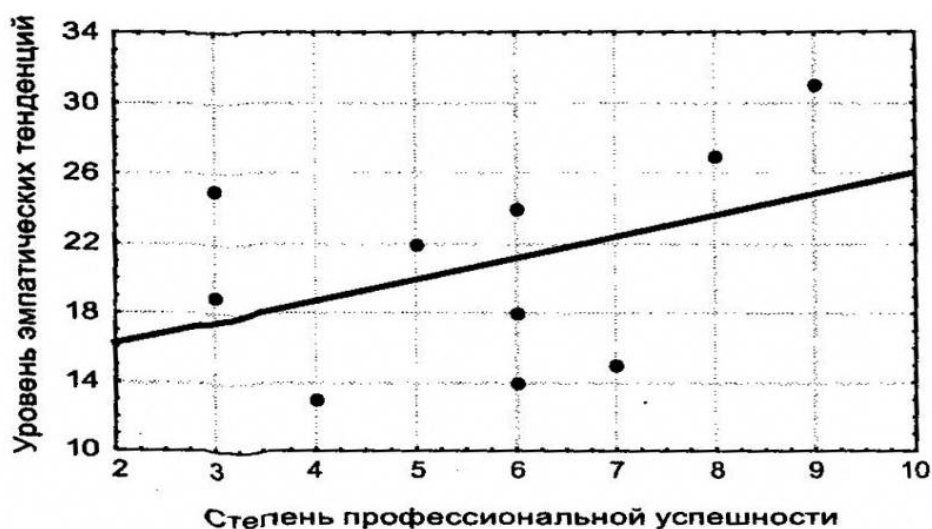


Рис. 9.2. Диаграмма рассеяния с наложенной линией регрессии

Если на некоторой выборке измерены две переменные, которые коррелируют друг с другом, то, вычислив коэффициенты регрессии, мы можем по известным значениям независимой переменной (X) предсказывать неизвестные значений зависимой переменной Y .

Пример 2 [9]. Психологи выявили взаимосвязь между успешностью обучения математике Y и показателем невербального интеллекта X . Было получено следующее уравнение регрессии: $Y = 1 + 0,025 \times X$. Каков показатель средней успеваемости по математике у учащихся, невербальный интеллект которых равен 132 и 82?

Решение. Для учащегося, показатель невербального интеллекта которого равен 132, в соответствии с уравнением регрессии можно предсказать его показатель средней успеваемости по математике:

$$Y = 1 + 0,025 \times 132 = 1 + 3,3 = 4,3.$$

У другого учащегося, показатель невербального интеллекта которого оказался равен 82, средняя успеваемость по математике составит

$$Y = 1 + 0,025 \times 82 = 1 + 2,05 = 3,05.$$

Решение задач линейной регрессии возможно с помощью универсальных статистических пакетов [10, с. 350–358].

3. Оценка точности прогноза

Линию регрессии можно рассматривать как прямую, построенную *методом наименьших квадратов*, т.е. сумма квадратов расстояний (по оси Y) от каждой точки диаграммы рассеяния до прямой является минимальной:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \min,$$

где y_i – истинное i -значение переменной Y , \hat{y}_i – оценка i -значения переменной Y при помощи линии регрессии, $e_i = y_i - \hat{y}_i$ – *ошибка оценки*.

Ошибку оценки e_i можно представить на диаграмме рассеяния (рис. 9.3) [18, с.73]:

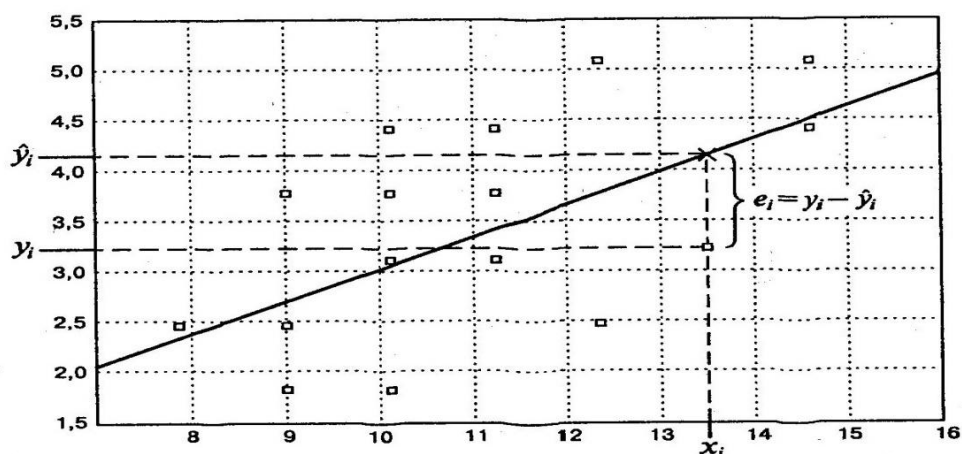


Рис. 9.3. Графическое представление ошибки оценки e_i для одного из объектов на диаграмме рассеяния

Предсказание неизвестных значений зависимой переменной по известным значениям независимой переменной возможно с различной степенью точности [18]:

- предсказание будет наиболее точным, если между переменными X и Y полная корреляция $|r_{xy}| = 1$. В этом случае каждому значению X будет соответствовать только одно значение Y , а все ошибки оценки будут равны нулю ($e_i = 0$). При этом все точки диаграммы рассеивания будут лежать на линии регрессии;
- прогностическая ценность регрессии будет минимальна, если коэффициент корреляции $r_{xy} = 0$. В этом случае при любом X оценка переменной Y будет равна ее среднему значению ($\hat{y}_i = \bar{y}$), а прямая регрессии параллельна оси X .

Во всех остальных случаях степень точности предсказаний значений переменной Y по значениям переменной X возможна с применением дисперсии n ошибок оценки e_i , которая обозначается σ_e^2 и вычисляется по следующей формуле [4]:

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2}{n-1}.$$

Между дисперсией ошибки оценки и дисперсией переменной Y существует взаимосвязь, которую можно выразить с помощью формулы

$$\sigma_e^2 = \sigma_y^2 \times (1 - r_{xy}^2).$$

Положительное значение квадратного корня из дисперсии ошибки оценки называют *стандартной ошибкой оценки*

$$\sigma_e = \sigma_y \times \sqrt{1 - r_{xy}^2}.$$

Стандартную ошибку оценки применяют для определения границ интервала предсказанного значения \hat{y} , в который с определенной вероятностью попадет фактическое значение y для объекта:

- около 68,3% данных будут иметь фактические значения, лежащие в пределах $\pm 1\sigma_e$ от их предсказанного значения \hat{y} ;

- около 95,5% данных будут иметь фактические значения, лежащие в пределах $\pm 2\sigma_e$ от их предсказанного значения \hat{y} ;

- около 99,7% данных будут иметь фактические значения, лежащие в пределах $\pm 3\sigma_e$ от их предсказанного значения \hat{y} .

Существует взаимосвязь между дисперсией предсказываемых значений \hat{y} и дисперсией фактических значений переменной Y :

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = r_{xy}^2 \times \sigma_y^2,$$

т.е. дисперсия предсказываемых значений равна произведению квадрата коэффициента линейной корреляции переменных X и Y и дисперсии переменной Y .

Из этой формулы следует, что если $r_{xy}^2 = 0$, то $\sigma_{\hat{y}}^2 = 0$, если $r_{xy}^2 = 1$, то $\sigma_{\hat{y}}^2 = \sigma_y^2$. Тогда $0 \leq \sigma_{\hat{y}}^2 \leq \sigma_y^2$. Это означает, что дисперсия оценок зависимой переменной Y – это та часть ее полной дисперсии, которая обусловлена влиянием независимой переменной X .

Из формулы связи дисперсий можно выразить величину r_{xy}^2 :

$$r_{xy}^2 = \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2},$$

т.е. квадрат коэффициента корреляции зависимой и независимой переменной r_{xy}^2 есть доля дисперсии зависимой переменной, обусловленная влиянием независимой переменной. Величина r_{xy}^2 показывает, в какой степени изменчивость одной переменной (зависимой) детерминирована влиянием другой переменной (независимой), и называется *коэффициентом детерминации* [18].

Например, в большинстве исследований взаимосвязи коэффициента IQ и школьной успеваемости учащихся было установлено, что $r_{xy} \approx 0,5 - 0,7$. Тогда $r_{xy}^2 \approx 0,25 - 0,49$, т.е. индивидуальная изменчивость среднего балла успеваемости может быть предсказана по результатам тестирования IQ не более чем на 25–49%. Означает ли это, что успешность обучения на 25–49% зависит от интеллекта. Ответ зависит от того, насколько средний балл выражает успешность обучения, а тест IQ – интеллектуальные способности учащегося [18]. Таким образом, парная регрессия обладает невысокой эффективностью предсказания.

Коэффициент детерминации r_{xy}^2 обладает важным преимуществом по сравнению с коэффициентом корреляции r_{xy} : r_{xy} не является линейной функцией связи переменных X и Y . Поэтому среднее арифметическое коэффициентов корреляции для нескольких выборок не совпадает с корреляцией, вычисленной сразу для всех испытуемых этих выборок. r_{xy}^2 отражает линейную связь переменных X и Y , поэтому допускается его усреднение для нескольких выборок.

3. Понятие о множественной линейной регрессии. Нелинейная регрессия

Предположим, что на величину исследуемого признака Y оказывает влияние большое число разнообразных факторов X_1, X_2, \dots, X_m . Тогда связь между ними можно выразить с помощью следующего линейного уравнения:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_mX_m,$$

где коэффициенты при факторах представляют собой коэффициенты корреляции факторов с результирующим признаком. Для определения коэффициентов b_1, b_2, \dots, b_m (т. е. степени влияния факторов X_1, X_2, \dots, X_m на параметры функции), а также свободного члена уравнения a существуют специальные алгоритмы и компьютерные программы. По сути дела задача множественного регрессионного анализа сводится к выявлению тех факторов, которые оказывают наиболее существенное влияние на величину исследуемого признака, и исключению тех факторов, влияние которых незначительно [14]. Подробнее множественная регрессия будет рассмотрена в теме «Многомерный статистический анализ».

Иногда, проводя анализ линейной регрессионной модели, исследователь получает данные о ее неадекватности. В этом случае для уточнения модели в ее уравнение добавляются некоторые нелинейные члены. Например, зависимую переменную определяют как логарифмическую или степенную функции, либо как любую композицию элементарных функций от независимой переменной. Полученная регрессионная зависимость является *нелинейной регрессией* [22].

Самым удобным способом оценивания параметров полученной регрессии является *нелинейное оценивание*. Оно является универсальной аппроксимирующей процедурой, оценивающей любой вид зависимости между переменной отклика и набором независимых переменных, и позволяет самому исследователю выбирать характер зависимости. Примером использования нелинейного оценивания является определение зависимости между стажем работы и производительностью труда, стоимостью дома и временем, необходимым для его продажи и т. д.

В общем случае все регрессионные модели могут быть записаны в виде формулы $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$. Это выражение означает, что переменная отклика Y является *функцией* от нескольких независимых переменных X .

При проведении регрессионного, в частности, нелинейного регрессионного анализа исследователя интересует, связаны ли (и если да, то как) зависимая переменная и набор независимых переменных. При этом возникают два вопроса:

- 1) как проверить, имеется ли на самом деле предсказанная нелинейная зависимость;
- 2) как истолковать найденную зависимость в виде простых практических рекомендаций.

С этой точки зрения линейная регрессия очень удобна, так как позволяет дать простое пояснение: чем больше X (т. е. чем больше цена дома), тем больше Y (тем больше времени нужно, чтобы его продать). Поэтому задавая конкретные приращения X , можно ожидать пропорциональное приращение Y . Однако линейная зависимость не всегда полно и точно может представить взаимосвязь между переменными. Нелинейная регрессия более адекватно отражает характер изучаемых связей, однако ее, как правило, нельзя так просто проинтерпретировать и выразить словами.

Вопросы для самоконтроля:

1. *Дайте определение регрессии.*
2. *Что позволяет установить регрессия?*
3. *Дайте определение фактора, предиктора.*
4. *Какие условия необходимы для применения регрессии?*
5. *Что называют линией регрессии?*
6. *Запишите уравнения регрессии. Определите величины, входящие в уравнения.*
7. *Представьте графически соотношение линий регрессии.*
8. *Что называется регрессионным анализом? Какова его основная задача?*
9. *Как можно вычислить коэффициенты регрессии?*
10. *По каким формулам рассчитываются свободные члены регрессионных уравнений?*
11. *Какими способами можно задать линейную регрессию?*
12. *Представьте формулу, связывающую коэффициент корреляции и коэффициенты регрессии.*
13. *В чем заключается суть метода наименьших квадратов?*
14. *Какую величину называют ошибкой оценки? Что она показывает?*
15. *Какую величину называют дисперсией ошибок оценки?*
16. *Что такое стандартная ошибка оценки? Для чего ее используют?*
17. *Дайте определение коэффициента детерминации? Что он показывает?*
18. *Для чего предназначена множественная линейная регрессия?*
19. *Дайте определение множественного регрессионного анализа. Для чего он используется?*
20. *Какие задачи позволяет решать множественный регрессионный анализ?*
21. *Что такое нелинейная регрессия?*
22. *Какие трудности встают перед исследователем при использовании нелинейной регрессии?*

ПРАКТИКУМ

Практическое занятие № 1 СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ В ПСИХОЛОГИИ

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Математическая статистика как наука.
2. Методы статистической обработки данных.
3. Достоинства и недостатки математико-статистического анализа данных исследования.
4. Основные этапы статистической обработки результатов исследования.
5. Признаки (переменные) в психологии. Уровни признака.
6. Виды переменных в психологии.
7. Физический подход к измерению.
8. Психологический подход к измерению.
9. Виды психологических измерений.
10. Понятие о психологическом шкалировании.
11. Классификация и свойства измерительных шкал.
12. Ранжирование и его этапы.

Задачи и упражнения

1. Привести примеры измерений различных видов (прямых, косвенных, непосредственных, опосредованных, одномерных, многомерных, малочисленных, многочисленных).

2. Привести примеры измерений, представленных:

- а) в номинальной шкале;
- б) в порядковой шкале;
- в) в интервальной шкале;
- г) в шкале равных отношений.

3. Показатели каких признаков из таблицы Приложения 8 являются номинальными, какие – метрическими [13]?

4. Определить, в какой шкале представлены приведенные ниже измерения. Ответ обосновать [13; 18; 21]:

- а) классификация вкусовых качеств: сладкое – горькое – кислое;
- б) классификация испытуемых по уровню интеллектуального развития: высокий уровень – средний уровень – низкий уровень;
- в) температура, измеренная по шкале Цельсия: 0°C, +5°C, +10°C;
- г) рост, измеренный в сантиметрах: 180 см – 160 см – 174 см;
- д) пол испытуемых: мужской – женский;
- е) воинское звание как мера продвижения по службе: рядовой – сержант – лейтенант – капитан;

ж) воинское звание как указание на принадлежность к определенной категории: рядовой – сержант – лейтенант – капитан;

з) классификация испытуемых по цвету волос: блондинка – брюнетка – рыжая;

и) классификация испытуемых по росту: высокий – средний – низкий;

к) температура, измеренная по шкале Кельвина: 0 К, +5 К, +10 К;

л) вес, измеренный в килограммах: 80 кг – 60 кг – 74 кг;

м) национальность испытуемых: русский – белорус;

н) академический статус как мера продвижения по службе: ассистент – доцент – профессор;

о) академический статус как указание на принадлежность к определенной категории: ассистент – доцент – профессор;

п) порядковый номер испытуемого в списке (для его идентификации);

р) упорядочивание испытуемых по времени решения тестовой задачи;

с) время решения задачи;

т) телефонные номера;

у) количество вопросов в анкете как мера трудоемкости опроса;

ф) предпочтение домашних животных: собаки – кошки – хомячки – никакие;

х) ответы на вопросы анкеты: да – нет – затрудняюсь ответить;

ц) ответы на вопросы анкеты: совершенно согласен – скорее согласен, чем не согласен – скорее не согласен, чем согласен – совершенно не согласен;

ч) количество агрессивных реакций за рабочий день;

ш) количество агрессивных реакций за рабочий день как показатель агрессивности;

щ) семейное положение: женат – холост – разведен;

э) статус ученика в классе: звезда – предпочитаемый – принятый – отверженный;

ю) упорядочивание испытуемым по степени значимости восемнадцати инструментальных ценностей (методика Рокича);

я) измерение времени сенсомоторной реакции испытуемых.

5. Проранжировать следующие массивы данных, используя принцип «меньшему значению – меньший ранг». Проверить правильность ранжирования:

а) 15, 2, 11, 6, 9, 7, 8;

б) 2, 3, 5, 1, 4, 5, 6, 5, 2;

в) 4, 5, 9, 2, 6, 5, 9, 7, 5, 12;

г) 8, 9, 11, 12, 12, 13, 14, 17, 19, 20, 20.

6. Перевести показатели осведомленности из таблицы Приложения 8 в ранговую шкалу, используя принцип «большему значению – меньший ранг». Выделить уровни выраженности показателей посредством их перевода в номинальную шкалу [13].

Практическое задание. Проранжировать студентов группы по среднему балу успеваемости за последний семестр, используя принцип «большему значению – меньший ранг».

Практическое занятие № 2

ТАБУЛИРОВАНИЕ И НАГЛЯДНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Понятие о генеральной и выборочной совокупностях.
2. Репрезентативная выборка.
3. Способы формирования выборки.
4. Классификация выборок в зависимости от объема.
5. Варианта. Частота, относительная и накопленная частота варианты.
6. Статистическое распределение выборки и его виды.
7. Этапы табулирования данных исследования.
8. Полигон частот (относительных частот) и правила его построения.
9. Гистограмма и правила ее построения.
10. Точечная диаграмма и правила ее построения.
11. Квантиль и его интерпретация.
12. Квартили, децили, процентиля и их характеристика.

Задачи и упражнения

1. Какая из перечисленных процедур отбора приведет к случайной выборке [21]:

а) генеральная совокупность – зрители определенной телевизионной программы (например, «Поле чудес»), процедура отбора – в определенный вечер опрашиваем каждого пятого зрителя, сидящего в зале студии;

б) генеральная совокупность – домашний пирог, процедура отбора – кусок, отрезанный от любой части пирога;

в) генеральная совокупность – ученики города Минска, процедура отбора – классный руководитель каждой школы города отбирает и присылает для участия в исследовании ученика.

2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7
n_i	1	3	5

Найти распределение относительных частот [6].

3. Построить полигон частот по данному распределению выборки [6]:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

4. По данному распределению выборки объема $n=100$ построить гистограмму [6]:

№ интервала	Частичный интервал	Частота
1.	[1; 5)	10
2.	[5; 9)	20
3.	[9; 13)	50
4.	[13; 17)	12
5.	[17; 21]	8

5. По данному распределению выборки объема $n=20$ задать распределение относительных частот [6]:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

6. По данному распределению выборки построить полигон относительных частот [6]:

x_i	2	4	5	7	10
w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

7. По данному распределению выборки объема $n=100$ построить гистограмму относительных частот [6]:

№ интервала	Частичный интервал	Частота
1.	[2; 7)	10
2.	[7; 12)	20
3.	[12; 17)	50
4.	[17; 22)	12
5.	[22; 27]	8

8. Дана частотная таблица роста мужей и жен. Построить гистограмму и полигон частот по этим данным [25]:

Мужья		Жены	
Интервал (в мм)	Частота	Интервал (в мм)	Частота
1550 – 1599	5	1400 – 1449	3
1600 – 1649	12	1450 – 1499	5
1650 – 1699	36	1500 – 1549	27
1700 – 1749	55	1550 – 1599	54
1750 – 1799	35	1600 – 1649	43
1800 – 1849	16	1650 – 1699	29
1850 – 1899	9	1700 – 1749	7
1900 – 1949	1	1750 – 1799	1

9. В исследовании изучалась способность детей соотносить изображения различных животных с их названием. Каждому ребенку предъявляли по 20 картинок. Количество правильных ответов для 15 детей приведено ниже:

20, 18, 13, 16, 9, 11, 17, 20, 14, 13, 20, 8, 17, 20, 14.

Построить вариационный ряд, определить объем выборки, представить распределение частот и полигон частот [25].

10. В результате рейтингового оценивания по предмету студенты группы получили следующее количество баллов:

75, 145, 150, 180, 125, 150, 150, 165, 95, 135, 130, 70, 130, 105, 135, 135, 100, 160, 60, 85, 120, 60, 145, 150, 135.

Построить вариационный ряд, определить объем выборки, представить интервальное распределение выборки и гистограмму.

11. Пятнадцать испытуемых производят по 25 выстрелов по мишени. Количество попаданий представлено ниже:

19, 10, 12, 13, 17, 14, 17, 15, 14, 15, 17, 15, 18, 19, 22.

Построить вариационный ряд, представить распределение частот и точечную диаграмму.

12. На экзамене по психологии студенты группы получили следующие баллы: 7, 9, 7, 6, 8, 6, 4, 7, 4, 6, 4, 3, 10, 5, 5, 10, 4, 8, 10, 10, 5, 6.

Представить данные в виде вариационного ряда, статистического распределения, точечной диаграммы и полигона частот.

13. В химической лаборатории был определен удельный вес некоторого вещества в серии проб (в %) [7]:

53, 33, 11, 55, 34, 13, 58, 36, 16, 61, 37, 17, 63, 39, 19, 66, 40, 20, 42, 22, 44, 23, 24, 45, 26, 28, 47, 49, 29, 51.

Представить данные в виде вариационного ряда, интервального распределения, гистограммы и полигона частот. Охарактеризовать полученное распределение.

14. В результате исследования уровня IQ у пятидесяти школьников получен следующий вариационный ряд:

119, 86, 100, 93, 108, 88, 104, 127, 103, 112, 111, 112, 113, 114, 115, 108, 116, 98, 121, 130, 104, 88, 113, 89, 103, 83, 91, 97, 87, 101, 107, 78, 110, 98, 84, 107, 92, 105, 89, 95, 111, 98, 84, 102, 92, 110, 101, 85, 114, 102.

Построить вариационный ряд IQ. Задать статистическое распределение выборки и его графическое представление [25].

15. В результате исследования удовлетворенности работой у преподавателей факультета психологии БГПУ были получены следующие данные:

67, 63, 64, 57, 56, 55, 53, 53, 54, 54, 45, 45, 46, 47, 37, 23, 34, 44, 27, 44, 45, 34, 34, 15, 23, 43, 16, 44, 36, 36, 35, 37, 24, 24, 14, 43, 37, 27, 36, 26, 25, 36, 26, 5, 44, 13, 33, 33, 17, 33.

Представить данные в виде интервального распределения и гистограммы. Охарактеризовать полученное распределение, если большой показатель означает выраженное удовлетворение, а маленький – слабое удовлетворение [25].

16. В группе студентов объемом 42 человека давалось тестовое задание и фиксировалось время его выполнения в секундах. Были получены следующие значения:

63, 35, 58, 53, 45, 61, 37, 58, 51, 40, 60, 55, 43, 57, 50, 61, 44, 64, 45, 77, 53, 46, 47, 72, 49, 51, 64, 52, 56, 58, 59, 60, 49, 64, 32, 51, 64, 65, 69, 66, 40, 69.

Представить данные в виде интервального распределения и гистограммы; охарактеризовать полученное распределение [13].

17. Для учащихся класса был вычислен средний балл успеваемости (по пятибалльной системе оценок):

3,43; 3,6; 3,67; 3,71; 3,71; 3,71; 3,75; 3,8; 3,87; 3,87; 3,87; 3,93; 3,93; 4,07; 4,07; 4,14; 4,14; 4,2; 4,23; 4,27; 4,27; 4,36; 4,38; 4,43; 4,5; 4,53; 4,57; 4,57; 4,6; 4,93.

Представить данные в виде интервального распределения и гистограммы; охарактеризовать полученное распределение [13].

18. Для показателей субтеста «Арифметика» Приложения 8 построить гистограмму и охарактеризовать результаты исследования [13].

19. В исследовании изучается скорость чтения младших школьников. Что означают следующие равенства [26]:

а) $P_5 = 52$; $P_{95} = 109$;

б) $Q_1 = 61$; $Q_3 = 98$;

в) $D_3 = 69$; $D_8 = 101$?

20. Для выборки объема $n = 100$ найти порядковый номер элемента, соответствующий P_{42} [26].

21. 20. Для выборки объема $n = 50$ найти порядковый номер элемента, соответствующий P_{42} [26].

22. Представить взаимосвязь между различными квантилями (P , Q , D) графически [26].

Практическое задание. Для показателей роста студентов группы (в см) задать интервальное распределение и гистограмму. Охарактеризовать полученное распределение.

Практическое занятие № 3 **ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ:** **ОПИСАТЕЛЬНЫЕ СТАТИСТИКИ**

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Понятие о мерах центральной тенденции.
2. Мода и правила ее определения.
3. Медиана и правила ее вычисления.
4. Среднее значение и его свойства.
5. Взаимосвязь между мерами центральной тенденции.
6. Понятие о мерах изменчивости. Размах.
7. Дисперсия и ее свойства.
8. Стандартное отклонение и его характеристика.
9. Коэффициент вариации и его интерпретация.
10. Асимметрия и ее свойства.
11. Эксцесс и его свойства.
12. Распределение признака и его виды.

Задачи и упражнения

1. Вычислить моду, медиану и среднее значение для каждой из представленных ниже групп измерений [25]:

а) 10, 8, 6, 0, 8, 3, 2, 5, 8, 0;

б) 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 9;

в) 119, 5, 4, 4, 4, 3, 1, 0.

В какой группе среднее – неподходящая мера центральной тенденции? Почему?

2. Вычислить среднее значение следующего вариационного ряда: 3, 4, 5, 5, 6, 7. Выполнить следующие задания [25]:

а) прибавить какое-нибудь число (например, 2) к каждому значению ряда. Вычислить среднее. Какой эффект на среднее оказывает прибавление константы к каждому значению признака?

б) вычесть это же число из каждого значения ряда. Вычислить среднее. Какой эффект оказывает вычитание константы из каждого значения признака?

в) умножить на 2 каждое значение ряда. Вычислить среднее. Какой эффект на среднее оказывает умножение на константу каждого значения признака?

г) разделить на 2 каждое значение ряда. Вычислить среднее. Какой эффект на среднее оказывает деление на константу каждого значения признака?

3. Студент подсчитал меры центральной тенденции для семейного дохода и выразил данные в рублях. Однако цифры получились большие и для улучшения восприятия дохода он разделил все данные на 1000. Как при этом изменятся все меры центральной тенденции [25]?

4. Исследование показало, что большинство детей, убежавших из дома и пойманных милицией, уже задерживались ранее по той же причине. Вычислить среднее, моду и медиану по следующим эмпирическим данным [25]:

Число предыдущих задержаний	0	1	2	3	4	5	6	7
Частота	3	4	6	9	6	2	3	2

5. Построить статистическое распределение выборки из 60 абитуриентов, для которых подсчитывалось число баллов. Вычислить среднее, моду и медиану [25]:

20	19	22	24	21	18	23	17	20	16	15	23	21	24	21	18	23	21	19	20
24	21	20	18	17	22	20	16	22	18	20	17	21	17	19	20	20	21	18	22
23	21	25	22	20	19	21	24	23	21	19	22	21	19	20	23	22	25	21	21

6. Вычислить моду, медиану и среднее значение для показателей субтеста «Осведомленность» из таблицы Приложения 8[13].

7. Вычислить моду, медиану и среднее значение для показателей субтеста «Скрытые фигуры» из таблицы Приложения 8[13].

8. Вычислить размах, дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации для каждой из представленных ниже групп измерений:

а) 10, 8, 6, 0, 8, 3, 2, 2, 8, 0;

б) 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 9;

в) 20, 1, 2, 5, 4, 4, 4, 0;

г) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

В какой группе размах является неподходящей мерой разброса? Почему в задании в) стандартное отклонение такое большое [25]?

9. Вычислить дисперсию и стандартное отклонение следующего вариационного ряда: 3, 4, 5, 5, 6, 7 [25]. Выполнить следующие задания:

а) прибавить какое-нибудь число (например, 2) к каждому значению ряда. Вычислить дисперсию и стандартное отклонение. Изменится ли результат, если к каждому значению прибавить большее число (например, 200)? Какой эффект на дисперсию оказывает прибавление константы к каждому значению признака?

б) умножить все значения ряда на 2. Подсчитать дисперсию и стандартное отклонение. Какой эффект на дисперсию оказывает умножение на константу каждого значения признака?

10. Приведенные ниже данные представляют собой наибольшие расстояния от дома (в км), на которые дети когда-либо уезжали путешествовать: 1000, 100, 400, 600, 3000, 700, 250, 600, 1100, 400, 1000, 1300, 500, 50, 200. Вычислить среднее, дисперсию и стандартное отклонение. Каковы преимущества каждого показателя [25]?

11. Три группы студентов выполняли тест на тревожность. В результате обработки результатов исследования получены следующие данные:

- первая группа – $\bar{x} = 72, \sigma = 2,1$;
- вторая группа – $\bar{x} = 74, \sigma = 5,6$;
- третья группа – $\bar{x} = 70, \sigma = 4,0$.

В какой группе студенты более всего отличаются по тревожности, в какой – менее всего [25]?

12. В исследовании времени простой сенсомоторной реакции в ответ на звуковой сигнал участвовало 20 испытуемых. Получены следующие значения времени реакции (в миллисекундах): 138, 180, 160, 144, 169, 140, 178, 134, 141, 174, 137, 172, 143, 126, 139, 130, 127, 144, 125, 132.

Вычислить размах, дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации [25].

13. Вычислить размах, дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации для показателей субтеста «Пропущенные слова» из таблицы Приложения 8 [13].

14. Вычислить размах, дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации для показателей субтеста «Арифметика» из таблицы Приложения 8 [13].

15. На основании следующих мер центральной тенденции указать, есть ли асимметрия в распределении признака, и если есть, то какая она [25]:

- а) $\bar{x} = 56, M_e = 62, M_o = 68$;
- б) $\bar{x} = 62, M_e = 62, M_o = 62$;
- в) $\bar{x} = 68, M_e = 62, M_o = 56$;
- г) $\bar{x} = 62, M_e = 62, M_{o1} = 30, M_{o2} = 94$.

16. Если известно, что среднее и медиана множества значений некоторого параметра равны, что можно сказать о форме распределения параметра [25]?

17. В результате диагностики 24 испытуемых с помощью методики Басса-Дарки были получены следующие данные по параметру «негативизм»: 2, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 5, 2, 4, 5, 2, 4, 1, 5, 1, 3, 1, 5, 5, 3, 3, 2, 3. Вычислить асимметрию и эксцесс распределения.

18. Каков вид распределения признака, если для него $D = 0$?

19. Вычислить асимметрию и эксцесс для показателей субтеста «Аналогии» из таблицы Приложения 8 [13].

20. Вычислить меры центральной тенденции, меры разброса, асимметрию и эксцесс для показателей субтеста «Понятливость» из таблицы Приложения 8 [13].

Практическое задание. Вычислить средний показатель роста студентов вашей группы (в см) и соответствующее стандартное отклонение. Определить форму распределения исследуемого признака.

Практическое занятие № 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ: СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Теория вероятностей как наука.
2. Виды событий и их характеристика.
3. Действия над событиями.
4. Классическая вероятность и ее свойства.
5. Относительная частота события и статистическая вероятность.
6. Комбинаторика, ее формулы и правила.
7. Теоремы сложения вероятностей.
8. Теоремы умножения вероятностей.
9. Полная вероятность, аналитический и графический способы ее нахождения.
10. Формулы Байеса.
11. Случайные величины. Дискретная случайная величина и способы ее задания.
12. Непрерывная случайная величина. Функция распределения случайной величины и ее свойства.
13. Математическое ожидание случайной величины и его свойства.
14. Дисперсия случайной величины и ее свойства.
15. Среднее квадратическое отклонение случайной величины и его характеристика.

Задачи и упражнения

1. Какие из предложенных ниже событий являются совместными [15]:

а) опыт – бросание монеты.

События: A – выпала цифра, B – выпал герб;

б) опыт – бросание игральной кости.

События: A – выпадение единицы, B – выпадение тройки, C – выпадение четного числа очков;

в) опыт – бросание двух монет.

События: A – хотя бы на одной из монет выпадет герб, B – на обеих монетах выпадет герб;

г) опыт – два выстрела по мишени.

События: A – есть хотя бы одно попадание; B – ни одного попадания.

2. Какие из предложенных ниже событий являются несовместными [15]:

а) опыт – бросание монеты.

События: A – выпал герб, B – выпала цифра;

б) опыт – два выстрела по мишени.

События: A – хотя бы одно попадание, B – хотя бы один промах;

в) опыт – бросание игрального кубика.

События: A – выпадение шестерки; B – выпадение четного числа очков;

г) опыт – сдача экзамена.

События: A – получение оценки «б» на экзамене, B – получение оценки ниже «10».

3. Какие из предложенных ниже событий являются равновероятными [5]:

а) опыт – подбрасывание симметричной монеты. События: A – появление герба, B – появление цифры;

б) опыт – подбрасывание погнутой монеты. События: A – появление герба, B – появление цифры;

в) опыт – выстрел по мишени. События: A – попадание, B – промах;

г) опыт – студент сдает зачет. События: A – сдал, B – не сдал.

4. Какие из предложенных ниже событий образуют полную группу событий [15]:

а) выигрыш по первому билету и проигрыш по второму лотерейному билету при наличии двух лотерейных билетов;

б) два попадания, одно попадание и ни одного попадания при двух выстрелах;

в) выпало 1, 2, 3, 4 очка при бросании игрального кубика;

г) попадание и промах при одном выстреле.

5. Подбрасывается два игральных кубика. Сколько элементарных исходов благоприятствует событию A – на обоих кубиках выпало одинаковое число очков [5]?

6. Подбрасывается два игральных кубика. Какому событию благоприятствует больше элементарных исходов: A – сумма выпавших очков равна 7 или B – сумма выпавших очков равна 8 [5]?

7. Опыт – подбрасывание двух игральных кубиков. Сколько элементарных исходов благоприятствует событию – выпало очков: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 [5]?

8. Пусть событие A состоит в изъятии туза из колоды в 36 карт. Сколько элементарных событий благоприятствует событию A , событию \bar{A} [15]?

9. Пусть событие B состоит в изъятии из колоды в 36 карт карты червовой масти. Сколько элементарных событий благоприятствует событию B , событию \overline{B} [15]?

10. Опыт состоит в подбрасывании двух монет. Событие A – выпал хотя бы один герб. Событие B – выпала хотя бы одна цифра. Какому из перечисленных событий будет равно событие $A - B$ [15]:

- а) не выпало ни одного герба;
- б) выпал один герб и одна цифра;
- в) выпало два герба.

11. Опыт состоит в том, что бросают две монеты. Событие A – выпал герб на первой монете. Событие B – выпал герб на второй монете. Какому из предложенных событий будет равно событие $A + B$ [15]:

- а) выпал один герб;
- б) не выпало ни одного герба;
- с) выпали цифры на обеих монетах.

12. Определить объединение и пересечение событий A и B , если A – событие, состоящее в том, что из десяти выстрелов стрелок попал в цель менее 6 раз, а B – состоит в том, что число попаданий стрелка нечетно [15].

13. Определить объединение и пересечение событий A и B , если A – событие, состоящее в том, что из 20 лотерейных билетов выигрышными оказались менее 4, а событие B состоит в том, что из 20 лотерейных билетов более 2 билетов оказались выигрышными [15].

14. Подбрасывается игральный кубик. Событие A – выпало шесть очков, B – выпало три очка, C – выпало четное число очков, D – выпало число очков, большее трех. Каковы соотношения между этими событиями [5]?

15. Пусть A, B, C – произвольные события. Что означают следующие события: $\overline{A} \times B \times C$, $\overline{A} \times \overline{B} \times \overline{C}$, $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$, $A \times \overline{B} \times \overline{C} + \overline{A} \times B \times \overline{C} + \overline{A} \times \overline{B} \times C$ [5]?

16. Опыт – подбрасывание игрального кубика. A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) – выпадение k очков. Выразить через события A_k следующие события: A – выпадение четного числа очков, B – выпадение нечетного числа очков, C – выпадение числа очков, кратного трем, D – выпадение числа очков, большего трех [5].

17. Опыт состоит в том, что стрелок производит три выстрела по мишени. Событие A_k ($k = 1, 2, 3$) – попадание в мишень при k -том выстреле. Выразить через события A_1, A_2, A_3 следующие события: A – хотя бы одно попадание, B – три попадания, C – три промаха, D – хотя бы один промах, E – не менее двух попаданий, F – не более одного попадания, G – попадание после первого выстрела [5].

18. Опыт – извлечение детали из ящика, в котором находятся детали трех сортов. Событие A – извлечена деталь первого сорта, событие B – извлечена деталь второго сорта, событие C – извлечена деталь третьего сорта. Что представляют собой следующие события: $A + B$, $\overline{A + C}$, $A \times C$, $A \times B + C$ [5]?

19. Пусть событие A состоит в том, что из 5 выстрелов стрелок попал в цель менее 3 раз, а событие B состоит в том, что, произведя 5 выстрелов в цель, стрелок попал четное число раз. Сколько элементарных событий

благоприятствует событиям $A + B$, $A \times B$, $A - B$, $\bar{A} + B$, $A + \bar{B}$, $\bar{A} + \bar{B}$, $A \times \bar{B}$, $\bar{A} \times B$, $\bar{A} \times \bar{B}$ [15]?

20. Пусть событие A состоит в изъятии туза, а событие B – в изъятии карты червовой масти из колоды в 36 карт. Сколько элементарных событий благоприятствует событиям $A + B$, $A \times B$, $A - B$, $\bar{A} + B$, $A + \bar{B}$, $\bar{A} + \bar{B}$, $A \times \bar{B}$, $\bar{A} \times B$, $\bar{A} \times \bar{B}$ [15]?

21. В урне 10 одинаковых по размеру и весу шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность, что извлеченный шар окажется голубым; красным [5]?

22. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на карточке окажется кратным 5 [5]?

23. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число будет простым [5]?

24. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы [5]?

25. Из букв слова «дифференциал» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной; б) согласной; в) буквой $ч$ [1]?

26. Подбрасываются две симметричные монеты. Какова вероятность того, что на верхних сторонах монет оказались цифры [5]?

27. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число кратно 3 [5]?

28. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок нового календаря соответствует первому числу месяца (год считается не високосным) [23]?

29. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь [23].

30. Среди 1000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков [5]?

31. В результате 20 выстрелов по мишени получено 15 попаданий. Какова частота попаданий [5]?

32. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти частоту простых чисел.

33. При стрельбе по мишени частота попаданий $W = 0,75$. Найти число попаданий при 40 выстрелах [5].

34. Частота нормального всхода семян $W = 0,97$. Из высеванных семян взошло 970. Сколько семян было посеяно [5]?

35. Контролер, проверяя качество 400 изделий, установил, что 20 из них относятся ко второму сорту, а остальные – к первому. Найти частоту изделий: а) первого сорта; б) второго сорта [5].

36. Для выяснения качества семян было отобрано и посеяно в лабораторных условиях 100 штук. 95 семян дали нормальный всход. Какова частота нормального всхода семян [5]?

37. Проведены три серии многократных подбрасываний симметричной монеты, подсчитаны числа появлений герба: 1) $n_1 = 4040$, $m_1 = 2048$; 2) $n_2 = 12000$, $m_2 = 6019$; 3) $n_3 = 12000$, $m_3 = 6019$. Найти частоту появлений герба в каждой серии испытаний [5].

38. Найти частоту появления простых чисел в следующих отрезках натурального ряда: а) от 21 до 40; б) от 41 до 50; в) от 51 до 70 [5].

39. Найти частоту пятибуквенных слов в любой газетной статье [5].

40. Найти частоту появления цифры при 100 подбрасываниях симметричной монеты [5].

41. Сколькими различными способами на скамейке могут разместиться 5 человек [5]?

42. Сколькими способами можно разместить на полке 8 книг различных авторов [23]?

43. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов [5]?

44. Кодовый замок открывается последовательным набором четырех разных цифр. Определите число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка [15].

45. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов [5]?

46. Из 25 студентов группы нужно выбрать 5 человек для дежурства. Сколькими способами это можно сделать [23]?

47. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 1, 1, 2, 2, 2 [5]?

48. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах «замок», «ротор», «топор», «колокол» [5]?

49. Кодовый замок открывается последовательным набором четырех цифр, среди которых могут быть повторяющиеся. Определите число возможных кодов, которые можно подобрать для этого замка [15].

50. Команда для ЭВМ состоит из 8 знаков, включающих только две цифры – 0 и 1. Какое количество различных восьмизначных команд существует [23]?

51. Сколькими различными способами в кондитерской можно выбрать 6 одинаковых или разных пирожных, если имеется 11 сортов пирожных [23]?

52. Коллекционер собирается приобрести 10 почтовых марок в киоске, где продаются марки 5 различных видов. Учитывая, что марки одного вида неразличимы, определите количество возможных вариантов покупки [15].

53. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить букетов [5]?

54. В классе из 6 мальчиков и 5 девочек надо выбрать 4 мальчика и 3 девочки для команды КВН. Сколькими способами этот выбор можно осуществить [23]?

55. Комплексная бригада состоит из 2 маляров, 3 штукатуров и 1 столяра. Сколько различных бригад можно создать из 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров [5]?

56. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: И, К, М, Н, С. Карточки перемешиваются и выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «МИНСК» [5]?

57. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках – Л, на трех остальных – И. Эти карточки наудачу выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «ЛИЛИИ» [5]?

58. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что из 6 взятых наудачу деталей 4 окажутся стандартными [5].

59. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что будут вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара [5]?

60. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что эти шары разного цвета [5].

61. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины [5]?

62. Из 10 лотерейных билетов выигрышными являются 2. Чему равна вероятность того, что среди 5 взятых наудачу билетов 1 окажется выигрышным [5]?

63. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет четное число очков [5]?

64. В урне 40 шаров: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шар [5]?

65. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, а во второй – 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор [5]?

66. В фирме 50 работников, 30 из которых имеют высшее образование, а 15 – среднее специальное. Какова вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или высшее или среднее специальное образование [15]?

67. Два студента сдают экзамен по математической статистике. Вероятность получить оценку «отлично» для первого студента равна 0,85, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы один студент сдал экзамен на «отлично» [5].

68. Вероятность того, что сотрудник фирмы знает немецкий язык, равна 0,3; знает французский – 0,2; знает оба языка – 0,02. Какова вероятность того, что наудачу выбранный сотрудник знает или немецкий или французский язык; не знает ни немецкого, ни французского языков [15]?

69. Найти вероятность совместного появления цифры при одном подбрасывании двух монет [5].

70. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2, или 7, или тому и другому одновременно [15].

71. В урне 6 голубых и 4 красных шара. Из нее извлекают подряд два шара. Какова вероятность того, что оба шара голубые [5]?

72. В ящике находится 10 стандартных и 5 нестандартных деталей. Из ящика последовательно, без возвращения извлекаются 3 детали. Найти вероятность того, что все три детали стандартные [5].

73. Примерно 5% мужчин и 0,25% женщин являются дальтониками. Какова вероятность того, что наугад выбранное лицо будет дальтоником [15]?

74. Вероятность того, что клиент банка не вернет кредит в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность начала периода экономического роста составляет 0,65. Чему равна вероятность того, что клиент не вернет полученный кредит? Решите задачу аналитическим способом и с помощью дерева вероятностей [15].

75. В учебном пособии по физике имеется 45 задач к первому разделу, 30 задач ко второму и 35 задач к третьему. Шансы студента правильно решить задачу из первого раздела оцениваются в 80%, из второго – в 65%, из третьего – в 85%. Определить вероятность того, что студент решит наугад выбранную задачу из пособия. Решите задачу двумя способами [15].

76. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 30% – вторым, на 50% – третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны 0,01; 0,005; 0,006. Найти вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется стандартной [5].

77. Руководство курортной гостиницы планирует наплыв отдыхающих в летний период и предполагает, что вероятность заполнения гостиницы в случае солнечной погоды равна 0,92, а в случае дождливой – 0,72. По прогнозам синоптиков, в течение июля будет 75% солнечных дней. Чему равна вероятность того, что гостиница будет заполнена в течение июля [15]?

78. В группе 21 студент, в том числе 5 отличников, 10 хорошистов и 6 занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получить только «отлично», хорошисты – с равной вероятностью «хорошо» и «отлично». Слабоуспевающие студенты могут получить с равной вероятностью «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно». Для сдачи экзамена приглашается один студент. Какова вероятность того, что он получит «хорошо» или «отлично» [5]?

79. Детали, изготавливаемые на заводе, попадают для проверки к первому контролеру с вероятностью 0,6, а ко второму – с вероятностью 0,4. Вероятность того, что деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,99, а вторым – 0,98. Деталь при проверке признана стандартной. Найти вероятность того, что ее проверил первый контролер [5].

80. Среди студентов университета – 30% первокурсников, 35% студентов второго курса, 20% третьекурсников и 15% студентов четвертого курса. По данным деканата 20% первокурсников, 30% второкурсников, 35% третьекурсников и 40% студентов четвертого курса сдали сессию на «отлично». Случайно выбранный студент при опросе оказался отличником. Чему равна вероятность того, что этот студент – третьекурсник [15]?

81. Изделия изготавливаются на трех поточных линиях: 30% на первой линии, 25% на второй, остальные – на третьей. Процент годности линий соответственно 97%, 98% и 96%. Наудачу взятое изделие завода оказалось бракованным. Определить вероятность того, что изделие изготовлено на первой, на второй, на третьей линиях [5].

82. Расследуются причины неудачного запуска ракеты, о котором можно высказать четыре гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4 . По данным статистики вероятность гипотез следующая: $P(H_1) = 0,2$; $P(H_2) = 0,4$; $P(H_3) = 0,3$; $P(H_4) = 0,1$. В ходе расследования обнаружено, что произошла утечка топлива (событие A). Условные вероятности события A по статистическим данным равны $P(A/H_1) = 0,9$; $P(A/H_2) = 0$; $P(A/H_3) = 0,2$; $P(A/H_4) = 0,3$. Какая из гипотез наиболее вероятна при данных условиях [5]?

83. В экзаменационных билетах по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» 15 вопросов к первому разделу, 20 вопросов – ко второму, 25 – к третьему и 15 – к четвертому разделу дисциплины. Студент выучил 12 вопросов из первого раздела, 15 вопросов – из второго, 15 – из третьего и 10 – из четвертого раздела. Студент наудачу вытаскивает вопрос, ответ на который хорошо знает. Определить вероятность того, что этот вопрос из четвертого раздела [15].

84. Задаёт ли закон распределения дискретной случайной величины X каждая из следующих таблиц [5]:

а)

X	2	3	4	5
P	0,1	0,4	0,3	0,2

б)

X	6	7	8	9
P	0,1	0,2	0,3	0,5

в)

X	0	1	2	3	4
P	0,05	0,15	0,20	0,25	0,35

г)

X	5	6	7	8	9
P	0,1	0,2	0,3	0,4	0,15

85. Дискретная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

а)

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1
P	0,1	0,2	0,4	p_4	0,1

б)

X	0	0,2	0,4	0,6	0,8
P	0,15	0,2	0,3	p_4	0,15

Найти вероятность: а) $p_4 = P(X = 0,8)$; б) $p_4 = P(X = 0,6)$. Построить многоугольник распределения [5].

86. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

Найти вероятность $p_1 = P(X = 3)$ и $p_3 = P(X = 5)$, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1 . Построить многоугольник распределения [5].

87. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	1	2	3	4	5
P	p_1	0,15	0,30	0,25	p_5

Найти вероятность $p_1 = P(X = 1)$ и $p_5 = P(X = 5)$, если известно, что p_5 в 2 раза больше p_1 . Построить многоугольник распределения [5].

88. Подбрасывается игральный кубик, фиксируется число очков, выпавших на верхней грани. Задать закон распределения дискретной случайной величины X – число очков, выпавших на верхней грани: а) табличным способом; б) с помощью формулы; в) графическим способом [5].

89. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красные. Из коробки наудачу извлекают три карандаша. Найти закон распределения случайной величины X , равной числу красных карандашей в выборке [5].

90. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные красные. Из этой урны извлекаются 3 шара. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – число голубых шаров в выборке [5].

91. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 000 рублей и десять выигрышей в 10 000 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – стоимость возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета [7].

92. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – число стандартных деталей в выборке [5].

93. По данным предыдущей задачи найти функцию распределения дискретной случайной величины, равной числу стандартных деталей в выборке и построить ее график [5].

94. Найти функцию распределения дискретной случайной величины X , закон распределения которой задан таблицей, и построить ее график [5]:

а)					б)					
X	0	1	2	3	X	5	6	7	8	9
P	0,2	0,4	0,3	0,1	P	0,05	0,15	0,20	0,25	0,35

95. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x/2 & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (1, 2) [5].

96. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x/3 & \text{при } 0 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (2, 3) [5].

97. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (5, 6) [5].

98. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	6	8	12	15
P	0,1	3/20	0,5	0,25

Найти функцию распределения этой случайной величины. Найти вероятность того, что $6 < X \leq 12$ [5].

99. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X , закон распределения которой задан таблицей [5]:

а)

X	3	4	5	6	7
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

б)

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

100. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

X	-4	-2	0	2	4
P	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

Записать законы распределения случайных величин $3X$, $X/2$. Найти математические ожидания случайных величин X , $3X$, $X/2$ [5].

101. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

X	3	6	9	12
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Записать законы распределения случайных величин $2X$, $X/3$. Найти математические ожидания случайных величин X , $2X$, $X/3$ [5].

102. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y :

а) $M(X) = 3$, $M(Y) = 2$; б) $M(X) = 7$, $M(Y) = 4$.

Найти математические ожидания суммы и разности этих величин [5].

103. Известны математические ожидания двух независимых случайных величин X и Y :

а) $M(X) = 4$, $M(Y) = 5$; б) $M(X) = 6$, $M(Y) = 8$.

Найти математическое ожидание их произведения [5].

104. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 2X + 7$, если известно, что $M(X) = 4$ [5].

105. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 8X + 5$, если известно, что $M(X) = 1,5$ [5].

106. Подбрасывается игральный кубик. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X , равной числу выпавших очков на верхней грани [7].

107. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$, $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3 . Найти x_3 и p_3 , зная что $M(X) = 8$ [6].

108. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения, заданный табличным способом:

а)

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

в)

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

б)

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

г)

X	131	140	160	180
P	0,05	0,10	0,25	0,60

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины [5; 6].

109. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины Z , если:

а) $Z = 3X + 2Y$ и известно, что $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$;

б) $Z = 2X + 3Y$ и известно, что $D(X) = 4$, $D(Y) = 4$ [6].

110. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X – число очков, выпадающих при подбрасывании игрального кубика [5].

111. Производятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – число появлений события в этих испытаниях [7].

Практическое задание. Путем опроса всех студентов вашего курса определить частоту дней рождения, попадающих на каждый месяц года [5].

Практическое занятие № 5 НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

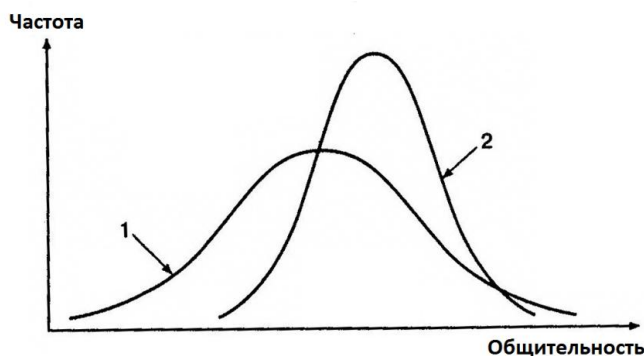
Вопросы для подготовки к занятию:

1. Понятие о распределении признака. Теорема Ляпунова.
2. Нормальное распределение и его параметры.
3. Свойства нормального распределения.
4. Стандартное нормальное распределение и его свойства.
5. Z-преобразование и его характеристика.
6. Интегральная теорема Лапласа и ее применение для вычисления вероятностей.
7. Правило 3σ и его графическое представление.
8. Использование правила 3σ для разработки тестовых норм.
9. Стандартизация и нормализация теста.
10. Приемы проверки распределения на нормальность.
11. Причины отклонения распределения от нормального.

Задачи и упражнения

1. По результатам измерения общительности у юношей (1) и девушек (2) были построены сглаженные графики распределения частот (рис. 1). Определить

с помощью графиков [18, с.48], как отличаются: а) средние значения \bar{x}_1 и \bar{x}_2 ; б) дисперсии D_1 и D_2 .



Графики распределений относительных частот общительности юношей (1) и девушек (2)

2. Построить кривые распределения двух случайных величин, распределенных по нормальному закону, со средними значениями \bar{x}_1 и \bar{x}_2 и дисперсиями D_1 и D_2 соответственно, если известно, что [18]:

- а) $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$; $D_1 = D_2$; в) $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$; $D_1 < D_2$;
 б) $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$; $D_1 = D_2$; г) $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$; $D_1 > D_2$.

3. Вероятность появления события A в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0,8$. С помощью интегральной теоремы Лапласа найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз [6].

4. Для поступления в колледж нужно успешно сдать вступительные экзамены. В среднем их успешно сдают лишь 70% абитуриентов. В приемную комиссию поступило 2100 заявлений. Найти вероятность того, что в колледж поступят: а) не менее 1470 и не более 1500 абитуриентов; б) не менее 1470 абитуриентов; в) не более 1469 абитуриентов [15].

5. Пусть для некоторого изучаемого признака, распределенного по нормальному закону, $n = 250$, $\bar{x} = 16$ и $\sigma = 2$. Какие максимальное и минимальное значения принимает признак? Сколько значений признака будет находиться в интервале: а) (14; 18); б) (12; 20) [12]?

6. Некоторое свойство измеряется при помощи тестовой шкалы СЕЕВ, для которой $\bar{x} = 500$ и $\sigma = 100$. Какая приблизительно доля генеральной совокупности имеет балл от 600 до 700 [18]?

7. Психологическое свойство измеряется при помощи тестовой шкалы стенов, для которой $\bar{x} = 5,5$ и $\sigma = 2$. Значение измеряемого свойства у некоторого тестируемого равно: а) 7; б) 3; в) 8. Проинтерпретировать полученные результаты.

8. Психологическое свойство измеряется при помощи тестовой шкалы стенов, для которой $\bar{x} = 5$ и $\sigma = 2$. Значение измеряемого свойства у некоторого тестируемого равно: а) 8; б) 4; в) 2. Проинтерпретировать полученные результаты.

9. Психологическое свойство измеряется при помощи тестовой Т-шкалы, для которой $\bar{x} = 50$ и $\sigma = 10$. Значение измеряемого свойства у некоторого тестируемого равно: а) 48; б) 64; в) 36. Проинтерпретировать полученные результаты.

10. Насколько часто (в %) встречается значение IQ, измеренное по шкале Векслера ($\bar{x}=100$ и $\sigma=15$), которое: а) превышает 130; б) ниже 70 [18]?

11. Какова вероятность того, что случайно выбранный человек будет иметь IQ, измеренное по шкале Векслера в диапазоне от 100 до 120 [18]?

12. Проверить на соответствие нормальному распределению показателей субтеста «Понятливость» из таблицы данных Приложения 8 [13].

13. Проверить на соответствие нормальному распределению показателей субтеста «Экстраверсия-интроверсия» из таблицы данных Приложения 8 [13].

14. Проверить на соответствие нормальному распределению показателей субтеста «Нейротизм» из таблицы данных Приложения 8 [13].

15. Определить, является ли значение 14 выбросом в следующем вариационном ряду: 3, 4, 5, 5, 6, 7, 14.

16. Определить, является ли значение 2 выбросом в следующем вариационном ряду: 12, 16, 18, 21, 23, 26, 29, 31, 35, 37, 38, 41, 42.

17. Определить, является ли значение 42 выбросом в следующем вариационном ряду: 12, 16, 18, 21, 23, 26, 29, 31, 35, 37, 38, 41, 42.

18. Известно, что среднее значение частоты пульса у группы больных равно 50, а стандартное отклонение $\sigma = 6,5$. Определить, относится ли больной с частотой пульса $x_i = 65$ к данной выборке, если распределение признака (частота пульса) близко к нормальному [12].

Практическое задание. Проверить на нормальность распределение показателей роста (в см) студентов-психологов первого курса.

Практическое занятие № 6 **ТЕОРИЯ ОЦЕНОК**

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Генеральная совокупность и ее характеристика.
2. Выборочная совокупность и ее характеристика.
3. Выборочный метод и его задачи.
4. Точечные оценки параметров и их свойства.
5. Интервальная оценка, надежность и точность оценки.
6. Интервальная оценка математического ожидания количественного признака.
7. Интервальная оценка среднего квадратического отклонения количественного признака.
8. Определение минимального объема выборки при известном среднем квадратическом отклонении количественного признака.
9. Определение минимального объема выборки при неизвестном среднем квадратическом отклонении количественного признака.

Задачи и упражнения

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти несмещенную оценку генеральной средней [6].

2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную оценку генеральной средней [6].

3. По выборке объема $n = 51$ найдена смещенная оценка $D = 5$ генеральной дисперсии $D(X)$. Найти несмещенную оценку S^2 дисперсии генеральной совокупности [6].

4. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором получены следующие результаты (в мм): 92, 94, 103, 105, 106. Найти: а) выборочную среднюю длины стержня; б) выборочную дисперсию; в) исправленную выборочную дисперсию [6].

5. В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором получены следующие результаты: 8, 9, 11, 12. Найти: а) выборочную среднюю длины стержня; б) выборочную дисперсию; в) исправленную выборочную дисперсию [6].

6. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки [6]:

а)

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

б)

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

7. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания $M(X)$ нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, выборочная средняя \bar{x} и объем выборки n : а) $\sigma(X) = 4$, $\bar{x} = 10,2$, $n = 16$; б) $\sigma(X) = 5$, $\bar{x} = 16,8$, $n = 25$ [6].

8. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma(X) = 40$ ч. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределено нормально [6].

9. В выборке из 25 студентов вычислен средний балл по дисциплине «Теория вероятностей» $\bar{x} = 6,82$. Считая, что успеваемость распределена по нормальному закону, найдите доверительный интервал, в котором окажется средний балл по этой дисциплине среди всех студентов вуза с вероятностью 0,95, если среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 0,85$ [15].

10. Станок-автомат штампует валики. По выборке объема $n = 100$ вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найти с надежностью 0,95 точность Δ , с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготавливаемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 2$ мм. Предполагается, что диаметры валиков распределены нормально [6].

11. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $\bar{x} = 42,8$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 8$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью 0,999. Предполагается, что результаты измерения распределены нормально [6].

12. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание $M(X)$ нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала [6].

13. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 12$:

x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание $M(X)$ нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала [6].

14. По данным выборки объема $n = 16$ из генеральной совокупности найдено «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение $S = 1$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ с надежностью 0,95 [6].

15. По данным выборки объема n из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака найдено «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение S . Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ с надежностью 0,999, если: а) $n = 10$, $S = 5,1$; б) $n = 50$, $S = 14$ [6].

16. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания $M(X)$ генеральной совокупности по выборочной средней равна $\Delta = 0,2$, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 1,5$ нормально распределенной генеральной совокупности [6].

17. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,95 точность оценки математического ожидания $M(X)$ нормально распределенного признака по выборочной средней равна $\Delta = 0,2$, если среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 2$ [6].

18. С помощью случайной выборки оценивается средний расход на продукты в расчете на одного члена семьи, проживающей в одном из городов области. Каким должен быть объем выборки в этом случае, если в предыдущих выборочных исследованиях стандартное отклонение этого показателя составило 50 у.е., а отклонение выборочной средней от генеральной средней по абсолютной величине не должно превышать 10 у.е. с вероятностью 0,9 [15]?

19. Среднемесячный бюджет студентов в вузах области оценивается по случайной выборке. С вероятностью 0,95 найти наименьший объем выборки, необходимый для такой оценки, если среднее квадратическое отклонение предполагается равным 1500 руб., а предельная ошибка средней не должна превышать 500 руб. [15].

20. С помощью случайной выборки оценивается количество слушателей компьютерных курсов, нашедших по их завершении работу, связанную с компьютером. С вероятностью 0,90 найти наименьший объем выборки, необходимый для такой оценки, если в предыдущих выборочных исследованиях стандартное отклонение этого показателя составило 0,24, а отклонение выборочной средней от генеральной средней по абсолютной величине не должно превышать 0,05 [15].

Практическое задание. Определить средний возраст студентов вашей группы. Вычислить: а) выборочную дисперсию; в) исправленную выборочную дисперсию.

Практическое занятие № 7 **ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ**

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Теоретические гипотезы и требования к ним.
2. Статистические гипотезы их классификация.
3. Виды выборок и их характеристика.
4. Число степеней свободы и правила его вычисления.
5. Уровни значимости и их характеристика.
6. Ошибки, допускаемые при проверке статистических гипотез.
7. Статистический критерий и его структура.
8. Параметрические и непараметрические критерии, их возможности и ограничения.
9. Ось значимости и ее применение при принятии-отвержении статистических гипотез.

Задачи и упражнения

1. Познакомиться с описанием эмпирического исследования и его результатов и сформулировать теоретическую гипотезу, которая проверялась в ходе ис-

следования: «В исследовании А.А. Смирнова испытуемым предлагали несколько фраз (каждая на определенное правило орфографии) и просили определить, какому правилу они соответствуют. Затем испытуемые должны были сами придумать примеры на то же правило. Никаких указаний о запоминании фраз не давалось. На следующий день участникам эксперимента предлагали вспомнить фразы, предложенные экспериментатором и придуманные самими. Результаты опытов обнаружили резкое различие в запоминании: фразы, составленные самими испытуемыми, воспроизводились в значительно большем количестве» [11].

2. Познакомиться с описанием эмпирического исследования и его результатов и сформулировать теоретическую гипотезу, которая проверялась в ходе исследования: «В одной из школ г. Сан-Франциско в каждом классе (с 1-го по 6-й) психологи произвольно отобрали по несколько школьников. В начале учебного года учителям сообщили, что по данным тестов эти дети должны вскоре проявить незаурядный познавательный прогресс. На самом деле эти данные были фиктивными. Но, как показало измерение коэффициента интеллектуальности в конце учебного года, у этих детей по сравнению с остальными интеллектуальные возможности в среднем существенно повысились. Этот феномен получил название “эффект Пигмалиона”» [11].

3. Познакомиться с теоретической гипотезой исследования и определить, является ли она описательной или объяснительной: «Если при выработке навыка испытуемый знает результат своих действий, то навык у него формируется быстрее, чем тогда, когда ему не сообщают об этих результатах» [11].

4. Познакомиться с теоретической гипотезой исследования и определить, является ли она описательной или объяснительной: «Предполагается, что чем больше сигарет в день выкуривает студент, тем ниже средний балл его успеваемости» [11].

5. Являются ли следующие гипотезы проверяемыми? Почему [24]?

а) у отличников просто хорошая память;

б) качество учебы повышается при увеличении времени, потраченного на изучение предмета;

в) дома учиться лучше, чем в библиотеке;

г) женщины – не мужчины!

6. Преобразовать следующие утверждения в проверяемые гипотезы [24]:

а) лучший способ учебы – посидеть ночь перед экзаменом;

б) кока-кола улучшает память;

в) волос долог – ум короток;

г) из глаз долой – из сердца вон.

7. Новая методика обучения сравнивается со старой, чтобы проверить, действительно ли она лучше. Определить [24]:

а) какая нулевая гипотеза H_0 будет подходящей в этом случае?

б) какая альтернативная гипотеза H_1 будет подходящей в этом случае?

в) что такое «уровень значимости» в этой проблеме?

г) что такое «мощность» в этой проблеме?

8. Какая альтернативная гипотеза H_1 будет соответствовать следующим нулевым гипотезам [24]:

а) удобрение A по крайней мере такое же хорошее, как и удобрение B ;

б) мой соперник не мошенничает;

в) циклы солнечной активности не влияют на развитие экономики;

г) длительность просмотра телепередач со сценами насилия не влияет на агрессивность подростков.

9. Какая нулевая гипотеза H_0 будет соответствовать следующим альтернативным гипотезам [24]:

а) этот студент обладает экстрасенсорным восприятием;

б) ивовый прутик помогает найти воду;

в) среднегодовая температура поднимается каждый год;

г) температура воздуха влияет на количество пачек мороженого, купленного в ларьке на протяжении недели.

10. Исследователю требуется сравнить уровень интеллекта мужчин и женщин. Сформулировать: а) ненаправленные нулевую и альтернативную гипотезы данного исследования; б) направленные нулевую и альтернативную гипотезы данного исследования [13].

11. Психологу нужно проверить эффективность проведенного им цикла занятий по коррекции тревожности у школьников. Сформулировать: а) ненаправленные нулевую и альтернативную гипотезы данного исследования; б) направленные нулевую и альтернативную гипотезы данного исследования.

12. Определить, какие выборки (зависимые или независимые) принимали участие в исследованиях, представленных в двух предыдущих задачах.

13. Чему равна степень свободы для двух зависимых выборок, объем которых n равен: а) 6; б) 14; в) 30 [13]?

14. Чему равна степень свободы для двух независимых выборок, объем которых равен: а) $n_1 = 6$ и $n_2 = 6$; б) $n_1 = 14$ и $n_2 = 16$; в) $n_1 = 25$ и $n_2 = 30$ [12]?

15. Указать уровень значимости, на котором принимается нулевая гипотеза H_0 : а) $p = 0,17$; б) $p = 0,05$; в) $p = 0,01$; г) $p = 0,004$ [21].

16. Указать уровень значимости, на котором принимается альтернативная гипотеза H_1 : а) $p = 0,12$; б) $p = 0,55$; в) $p = 0,001$; г) $p = 0,57$ [21].

17. Указать уровень значимости, при котором полученные результаты являются случайными: а) $p = 0,003$; б) $p = 0,99$; в) $p = 0,01$; г) $p = 0,001$ [21].

18. Указать уровень значимости, при котором полученные результаты являются достоверными: а) $p = 0,07$; б) $p = 0,5$; в) $p = 0,02$; г) $p = 0,11$ [21].

Практическое задание. Сформулировать проверяемую экспериментальную гипотезу. Определить соответствующие ей статистические гипотезы.

Практическое занятие № 8 КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Виды связей между признаками. Функциональная связь и ее характеристика.
2. Корреляционная связь и корреляционная зависимость.
3. Классификация корреляционных связей по направлению и форме.
4. Общая и частная классификация корреляционных связей по силе.
5. Наглядное представление корреляционных связей.
6. Меры связи для качественных переменных.
7. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена: описание, ограничения, алгоритм вычисления.
8. Меры связи для количественных переменных.
9. Коэффициент линейной корреляции Пирсона: описание, ограничения, алгоритм вычисления: метод «сырых» данных, методы средних и стандартных отклонений.
10. ϕ -коэффициент сопряженности: описание, ограничения, алгоритм вычисления.
11. Рангово-бисериальный коэффициент корреляции r_{rb} : описание, ограничения, алгоритм вычисления.
12. Точечный бисериальный коэффициент корреляции r_{pb} : описание, ограничения, алгоритм вычисления.
13. Алгоритм выбора необходимого коэффициента корреляции.
14. Причины низкой корреляции при наличии взаимосвязи между переменными.

Задачи и упражнения

1. Какой из представленных ниже коэффициентов корреляции показывает самую сильную связь, самую слабую связь? [21]?
а) -0,89; б) 0,32; в) 0,58; г) -0,91.
2. Какой из представленных ниже коэффициентов корреляции показывает обратную связь, прямую связь [21]?
а) -0,89; б) 0,32; в) 0,58; г) -0,91.
3. Указать ошибку в величине коэффициента корреляции [21]:
а) 0,89; б) 1,32; в) 0,058; г) -0,91.
4. Психолог-исследователь Бирюлькин сообщил, что получил сильную положительную связь между вероисповеданием человека и его расой. Раскритиковать выводы Бирюлькина [21].
5. Для каждого из представленных ниже наборов данных построить диаграмму рассеяния. Какая диаграмма представляет: нелинейную связь; положительную корреляционную связь; отсутствие корреляционной связи; отрицательную корреляционную связь [21]?

а)

X	1,5	1,0	1,0	1,5	1,5	2,0	2,5	2,5	3,0	3,0	3,5	3,5	4,0	4,0	4,5	5,0
Y	0,5	0,5	2,0	1,5	2,0	2,0	2,5	3,2	2,5	3,5	3,5	4,5	3,5	4,5	4,5	5,0

б)

X	0,5	0,5	1,0	1,5	1,5	2,0	2,5	2,5	3,0	3,0	3,5	3,5	4,0	4,0	5,0
Y	5,0	4,5	3,5	4,0	2,5	3,0	2,0	3,5	2,5	2,0	2,0	2,5	1,5	0,7	0,5

в)

X	0,5	1,0	1,0	1,5	1,5	2,0	2,0	2,5	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	4,0	4,5	5,0	5,0
Y	0,5	1,0	1,5	2,5	3,5	2,5	3,5	4,5	3,5	3,0	2,5	2,0	2,5	2,0	1,0	1,0	0,5

г)

X	0,5	0,5	0,5	1,0	1,5	1,5	1,5	2,0	3,0	3,0	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	4,0	4,5	4,5
Y	1,0	2,5	4,5	3,5	1,0	2,5	4,0	1,0	2,0	3,5	4,5	1,0	1,0	3,5	3,5	4,5	2,5	1,0

6. В группе из 15 учеников исследовали силу связи между уровнем интеллекта и средним показателем школьной успеваемости. Выяснилось, что: а) $r_{xy} = 0,65$ при $p = 0,04$; б) $r_{xy} = 0,65$ при $p = 0,06$; в) $r_{xy} = 0,25$ при $p = 0,04$; г) $r_{xy} = 0,25$ при $p = 0,01$. Как можно проинтерпретировать полученный результат [13]?

7. Построить диаграмму рассеяния для показателей первых 12 человек из таблицы данных Приложения 8 для субтестов «Исключение изображений» и «Аналогии» [13].

8. Проинтерпретировать следующую корреляционную матрицу [21]:

	1	2	3	4
1. Размер фирмы	1			
2. Зарплата	0,40	1		
3. Возраст работников	-0,11	0,67	1	
4. Образование работников	0,030	0,00	0,07	1

9. В группе из десяти студентов было проведено сравнительное исследование между показателями нейротизма (по тесту Айзенка) и тревожности (по методике Тейлора):

Тревожность	19	11	44	28	17	49	37	32	29	45
Нейротизм	7	9	11	14	14	17	18	18	19	22

Построить диаграмму рассеяния для данных исследования. Вычислить коэффициент ранговой корреляции между исследуемыми признаками, определить уровень его статистической значимости и дать интерпретацию [13].

10. Для каждого из 12 учащихся одного класса известно время решения тестовой арифметической задачи в секундах и средний балл отметок по математике (по пятибалльной системе) за последнюю четверть:

Время решения задачи	122	105	100	145	130	90	162	172	120	150	170	112
Средний балл	4,7	4,5	4,4	3,8	3,7	4,6	4,0	4,2	4,1	3,6	3,5	4,8

Вычислить коэффициент ранговой корреляции между исследуемыми признаками, определить уровень его статистической значимости и дать интерпретацию [18].

11. Знания 10 студентов проверены по двум тестам: A и B . Оценки по сто-балльной системе оказались следующими:

Баллы по тесту A	95	90	86	84	75	70	62	60	57	50
Баллы по тесту B	92	93	83	80	55	60	45	72	62	70

Найти коэффициент ранговой корреляции Спирмена между оценками по двум тестам [6].

12. Найти коэффициент ранговой корреляции Спирмена между результатами тестирования 12 студентов по двум методикам A и B [6]:

Результаты методики A	74	85	40	96	86	56	41	41	56	60	70	80
Результаты методики B	78	81	44	90	80	60	50	51	50	53	69	81

13. Определить коэффициент корреляции рангов Спирмена между временем реакции испытуемых и эффективностью их действий (количеством пораженных мишеней в серии выстрелов) [12]:

Время реакции	17	13	20	18	21	22	19	20	17	19	14	12	18	21	17
Эффективность	8	20	6	8	17	10	10	9	7	8	14	13	16	11	12

14. Два преподавателя X и Y оценили знания 12 учащихся по стобалльной системе и выставили им следующие оценки:

Баллы X	98	94	88	80	76	70	63	61	60	58	56	51
Баллы Y	99	91	93	74	78	65	64	66	52	53	48	62

Найти коэффициент ранговой корреляции Спирмена между оценками двух преподавателей [6].

15. Вычислить коэффициент ранговой корреляции Спирмена между показателями абстрактной и конкретной памяти, полученными в результате диагностики 10 испытуемых [13]:

Абстрактная память	47	44	43	42	40	39	39	39	37	35
Конкретная память	30	25	27	25	24	21	20	14	25	19

16. Специалисты A и B двух заводов проранжировали 11 факторов, влияющих на ход технологического процесса. В итоге были получены две последовательности рангов:

Ранги A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ранги B	1	2	3	5	4	9	8	11	6	7	10

Определить, согласуются ли мнения специалистов различных заводов, используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена [6].

17. Супруги X и Y проранжировали 8 жизненных ценностей по степени предпочтения. Данные представлены в таблице:

Ценности	Ранги X	Ранги Y	Ценности	Ранги X	Ранги Y
Здоровье	1	1	Мудрость	4	5
Любовь	2	3	Познание	6	7
Богатство	4	3	Развитие	7	7
Свобода	4	3	Творчество	8	7

Определить согласованность предпочтений супругов с помощью коэффициента ранговой корреляции Спирмена [18].

18. Три арбитра A , B , C оценили мастерство 10 спортсменов. В результате были получены три последовательности рангов:

Ранги A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранги B	3	10	7	2	8	5	6	9	1	4
Ранги C	6	2	1	3	9	4	5	7	10	8

Определить пару арбитров, оценки которых наиболее согласуются, используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена [6].

19. На выборке из семи человек было проведено сравнительное исследование уровня интеллектуальной ригидности и уровня интеллекта:

Показатели интеллектуальной ригидности	22	28	39	33	31	34	15
Уровень интеллекта	120	110	112	115	118	104	116

Вычислить коэффициент линейной корреляции между исследуемыми признаками, определить уровень его статистической значимости и дать интерпретацию [13].

20. Вычислить значение коэффициента линейной корреляции между показателями роста (в см) и веса (в кг) у представителей группы студентов:

Рост	159	160	172	160	171	163	164	166	175	170
Вес	47	49	65	57	68	50	59	68	63	54

Определить уровень статистической значимости коэффициента и дать интерпретацию [13].

21. Вычислить значение коэффициента линейной корреляции между показателями вербального и невербального интеллекта у 20 учащихся 8-го класса:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Вербальный IQ	13	9	8	9	7	9	8	13	11	12	8	9	10	10	12	10	8	9	10	11
Невербальный IQ	12	11	8	12	9	11	9	13	9	10	9	8	10	12	10	10	11	10	11	13

Определить уровень статистической значимости коэффициента и дать интерпретацию [18].

22. При процедуре проверки валидности теста Пиллюлькина по определению статуса испытуемого в группе сравнивали результаты тестирования с оценками, которые дал эксперт. С помощью коэффициента корреляции Пирсона определить, является ли тест валидным ($r_{xy} > 0,75$) [21].

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Результат тестирования	12	2	3	1	4	5	14	11	6	9	7	10	15	8	13	16
Оценка эксперта	15	1	7	4	2	3	11	10	5	9	6	12	13	8	14	16

23. Определить величину коэффициента корреляции для следующих данных:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X	100	90	126	112	80	115	105	110	99	97	87	76	100	80	120
Y	28	25	19	24	23	21	27	25	26	25	23	18	29	20	18

Построить диаграмму рассеяния для приведенных данных. Определить форму связи между X и Y , если она существует [4].

24. Провести корреляционный анализ показателей субтестов «Числовые ряды» и «Умозаключения» из таблицы данных Приложения 8 [13].

25. В результате тестирования пяти студентов по двум методикам A и B были получены следующие данные:

Баллы по тесту A	5	5	5	5	5
Баллы по тесту B	1	3	5	7	9

Вычислить коэффициент линейной корреляции Пирсона r_{xy} . Перевести баллы в ранги и вычислить коэффициент ранговой корреляции Спирмена r_s . Какой эффект оказывают связанные ранги на r_s [21]?

26. Исследователь выдвинул гипотезу о том, что общая тревожность уменьшается, когда человек курит. С помощью коэффициента линейной корреляции Пирсона проверить правильность гипотезы [21]:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Уменьшение тревожности (в %)	14	8	9	2	4	0	15	22	7	9	3	1	14	6	2	4	7	8	11	6
Количество сигарет, выкуранных перед повторным тестированием	6	3	21	0	3	4	9	9	4	3	0	6	12	3	1	7	4	2	9	7

27. Пользуясь данными предыдущей задачи построить диаграмму рассеяния, рассматривая в качестве независимой переменной количество выкуранных сигарет, а в качестве зависимой – уменьшение тревожности. Является ли отношение между переменными близким к линейному? Пересчитать коэффициент линейной корреляции Пирсона r_{xy} , убрав сразу значение (22; 9), а затем значение (9; 21). Как при этом изменился r_{xy} , почему [21]?

28. Вычислить коэффициент корреляции между возрастом испытуемых и испытываемым ими страхом попасть в неприятное положение (большой страх выражается большим баллом):

Возраст	22	35	47	56	72
Страх	2	7	6	14	13

Переставить баллы, выражающие страх, в обратном порядке: если первоначально оценка страха варьировала от 1 до 15, то при изменении порядка начисления баллов 1 заменяется на 15, 2 – на 14 и т.д. Как при этом изменится коэффициент корреляции [21]?

29. Установить, существует ли взаимосвязь между семейным положением студенток (X : 0 – не замужем, 1 – замужем) и успешностью окончания ими вуза (Y : 0 – закончила вуз, 1 – отчислена). В распоряжении исследователя есть данные для 12 студенток [18]:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0
Y	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0

30. Проверить гипотезу о наличии гендерных различий (X : 0 – девушки, 1 – юноши) в вербальных способностях подростков. Результаты ранжирования 15 школьников разного пола по степени выраженности вербальных способностей, которое провела учительница русского языка и литературы, представлены в таблице [14]:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Пол	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
Ранг вербальных способностей	1	10	6	9	15	7	8	13	4	3	5	11	12	2	14

31. Проверить гипотезу о наличии гендерных различий (X : 0 – девушки, 1 – юноши) в показателях интеллекта подростков. Данные обследования 15 школьников разного пола приведены в таблице [14]:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Пол	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
Показатель интеллекта	102	110	86	90	120	78	95	103	105	93	123	89	109	100	105

Практическое задание. Проверить гипотезу о наличии взаимосвязи между количеством баллов, набранных студентами группы при поступлении в вуз, и средним баллом успеваемости за первый семестр, используя для этого: а) коэффициент ранговой корреляции Спирмена; б) коэффициент линейной корреляции Пирсона.

Практическое занятие № 9 РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Регрессия и ее характеристика.
2. Графическое представление регрессии.
3. Линейный регрессионный анализ.
4. Способы задания линейной регрессии.
5. Ошибка оценки.
6. Стандартная ошибка оценки и ее применение.
7. Коэффициент детерминации и его характеристика.
8. Множественная линейная регрессия и ее задачи.
9. Понятие о нелинейной регрессии.

Задачи и упражнения

1. При исследовании зависимости между количеством бракованной продукции (Y), выпускаемой предприятием (в %), и количеством (в %) рабочих с профессиональной подготовкой (X) было получено уравнение регрессии: $y = 28,2747 - 0,327x$.

Определить прогноз выпускаемого брака, если на предприятии 50% рабочих имеют профессиональную подготовку [15].

2. В результате исследования зависимости баллов по третьему субтесту теста Векслера (X) и оценок по алгебре (Y) у подростков получены следующие уравнения регрессии: $y = 3 - 0,06 \times x$ и $x = 9 - 1 \times y$.

На сколько баллов повысится успешность решения третьего субтеста методики Векслера, если оценки по алгебре повысятся на 1 балл? Будет ли повышение успешности решения третьего субтеста методики Векслера на 1 балл влиять на повышение оценок по алгебре [13]?

3. Рассчитать формулу регрессионного уравнения зависимости роста (X) от веса (Y) у представителей группы студентов и построить соответствующий график [13]:

Рост	159	160	172	160	171	163	164	166	175	170
Вес	47	49	65	57	68	50	59	68	63	54

4. Имеются данные зависимости между количеством удобрений (в кг/га) и урожайностью сахарной свеклы (в ц/га):

Количество свеклы (X)	135	135	182	175	200	200	210	210	265	256
Количество удобрения (Y)	140	148	150	150	185	190	202	220	220	240

По представленным данным: а) исследовать зависимость между признаками методом корреляционного анализа; б) рассчитать величину коэффициентов регрессии; в) построить уравнение регрессии; г) определить прогноз урожайности сахарной свеклы, если использовали 230 кг/га удобрений [15].

5. Имеются данные по десяти предприятиям о текучести кадров и количестве выпущенной ими качественной продукции (в процентах):

Текучесть кадров, % (X)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,7	0,7	0,9
Качественная продукция, % (Y)	92	95	90	89	89	85	86	83	80	78

По представленным данным: а) исследовать зависимость между признаками методом корреляционного анализа; б) рассчитать величину коэффициентов регрессии; в) построить уравнение регрессии; г) определить прогноз качественной продукции, если текучесть кадров на предприятии составляет 0,8% [15].

6. Имеются данные по десяти магазинам о цене на аппаратуру в у.е. и количестве продаж в штуках:

Количество продаж (X)	420	380	350	400	440	380	450	420	480	460
Цена на аппаратуру (Y)	5,5	6	6,5	6,2	5,2	5,8	4,5	5,2	4,2	4,3

По представленным данным: а) исследовать зависимость между признаками методом корреляционного анализа; б) рассчитать величину коэффициентов регрессии; в) построить уравнение регрессии; г) определить прогноз объема продаж, если цена на аппаратуру равна 6,6 [15].

7. Имеются данные о производительности труда (в штуках) и коэффициенте механизации труда (в процентах):

Коэффициент механизации труда, % (X)	32	35	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
Производительность труда (Y)	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

По представленным данным: а) исследовать зависимость между признаками методом корреляционного анализа; б) рассчитать величину коэффициентов регрессии; в) построить уравнение регрессии; г) определить прогноз производительности труда при коэффициенте механизации труда 65% [15].

8. Компанию по прокату автомобилей интересует связь между длиной пробега (тыс. км) и стоимостью ежемесячного обслуживания (у.е.). Результаты исследования представлены в таблице:

Пробег (X)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Стоимость обслуживания (Y)	13	16	15	20	19	21	26	24	30	32	32	34	40	39

По представленным данным: а) исследовать зависимость между признаками методом корреляционного анализа; б) рассчитать величину коэффициентов регрессии; в) построить уравнение регрессии; г) определить прогноз стоимости обслуживания при пробеге в 14,5 тыс.км. [15].

9. При исследовании годового дохода (тыс. у.е.) и сбережений населения (у.е.) получены следующие данные:

Годовой доход (X)	15	6	9	3	3	29	11	14	10	12
Сбережения (Y)	2000	200	500	500	5,8	2500	1800	1500	1500	1600

По представленным данным: а) исследовать зависимость между признаками методом корреляционного анализа; б) рассчитать величину коэффициентов регрессии; в) построить уравнение регрессии; г) определить прогноз сбережений при размере годового дохода 8 тыс. у.е. [15].

10. Методом корреляционного анализа исследовать зависимость между возрастом жилого дома (в годах) и затратами на его капитальный ремонт:

Возраст дома (X)	5	7	9	8	10	6	4	13
Стоимость ремонта (Y)	52	105	165	170	220	100	75	310

По представленным данным: а) рассчитать величину коэффициентов регрессии; б) построить уравнение регрессии; в) определить прогноз стоимости ремонта дома, возраст которого 17,5 лет [15].

11. Имеются данные по объему импорта (тыс. дол.) и взысканию налоговых платежей в бюджет (тыс. руб.):

Объем импорта (X)	68	59	58	63	62	66	53	52	55	46
Взыскание налогов (Y)	170	125	190	200	185	160	140	150	120	350

По представленным данным: а) исследовать зависимость между признаками методом корреляционного анализа; б) рассчитать величину коэффициентов регрессии; в) построить уравнение регрессии; г) определить прогноз платежей в бюджет при объеме импорта в 65 тыс. дол. [15].

12. Имеются данные по энерговооруженности одного работника (в кВт) и его выработке (в тыс. руб.):

Энерговооруженность (X)	6	2	3	4	3	5	6	2	4	5
Выработка (Y)	8,5	3,2	6,3	6,4	5,8	7,7	8,6	3,4	6,3	7,6

По представленным данным: а) исследовать зависимость между признаками методом корреляционного анализа; б) рассчитать величину коэффициентов регрессии; в) построить уравнение регрессии; г) определить прогноз выработки работника при энерговооруженности 5,5 кВт [15].

Практическое задание. Представить данные о количестве баллов, набранных студентами группы при поступлении в вуз, и среднем балле их успеваемости за первый семестр. По данным первых десяти студентов из списка группы: а) исследовать зависимость между вышеназванными признаками методом корреляционного анализа; б) рассчитать величину коэффициентов регрессии; в) построить уравнение регрессии; г) определить прогноз успеваемости студента, набравшего при поступлении 180 баллов.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОГРАММИРОВАННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Блок 1. Способы получения статистических данных в психологии

1. Раздел математики, который изучает методы сбора, систематизации, обработки и использования статистических данных для получения научных и практических выводов – это:

- А) статистика;
- Б) теория вероятностей;
- В) математическая статистика;
- Г) комбинаторика.

2. Математическая статистика включает следующие разделы:

- А) описательная статистика, дедуктивная статистика, планирование и анализ эксперимента;
- Б) описательная статистика, индуктивная статистика, планирование и анализ эксперимента;
- В) индуктивная статистика, дедуктивная статистика, планирование и анализ эксперимента;
- Г) описательная статистика, индуктивная статистика, дедуктивная статистика.

3. Какой из методов статистической обработки данных не относится к первичным методам:

- А) вычисление мер центральной тенденции;
- Б) вычисление мер изменчивости;
- В) выдвижение статистических гипотез;
- Г) наглядное представление данных в виде графиков и схем.

4. Какой из методов статистической обработки данных не относится к вторичным методам:

- А) вычисление мер изменчивости;
- Б) выдвижение статистических гипотез;
- В) проверка гипотез с помощью статистических методов;
- Г) подготовка данных для применения статистических методов.

5. Переменная, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка – это:

- А) дискретная переменная;
- Б) непрерывная переменная;
- В) зависимая переменная;
- Г) независимая переменная.

6. Переменная, которую экспериментатор может изменять по своему замыслу – это:

- А) дискретная переменная;
- Б) непрерывная переменная;

- В) зависимая переменная;
- Г) независимая переменная.

7. Измерение, при котором значения показателей испытуемого сравниваются со значениями распределения аналогичных показателей в эталонной группе лиц – это:

- А) нормативное измерение;
- Б) критериальное измерение;
- В) ипсативное измерение;
- Г) опосредованное измерение.

8. Измерение, при котором значения показателей испытуемого сравниваются со стандартом выполнения задания, установленным экспертным или эмпирическим путем – это:

- А) нормативное измерение;
- Б) критериальное измерение;
- В) ипсативное измерение;
- Г) опосредованное измерение.

9. Измерения, которые выполняются с помощью измерительных приборов или подручных средств – это:

- А) прямые измерения;
- Б) косвенные измерения;
- В) непосредственные измерения;
- Г) опосредованные измерения.

10. Измерения, которые используются для изучения слабо изменяющихся величин – это:

- А) одномерные измерения;
- Б) малочисленные измерения;
- В) зависимые измерения;
- Г) непосредственные измерения.

11. Измерительная шкала, которая классифицирует объекты в соответствии со степенью выраженности заданного свойства – это:

- А) номинальная шкала;
- Б) ранговая шкала;
- В) интервальная шкала;
- Г) шкала равных отношений.

12. Измерительная шкала, которая классифицирует объекты пропорционально степени выраженности измеряемого свойства – это:

- А) номинальная шкала;
- Б) ранговая шкала;
- В) интервальная шкала;
- Г) шкала равных отношений.

13. Измерительная шкала, которую можно задать с помощью единицы измерения и произвольной точки отсчета – это:

- А) номинальная шкала;
- Б) ранговая шкала;

- В) интервальная шкала;
- Г) шкала равных отношений.

14. Ранжирование – это перевод исходных данных:

- А) из ранговой шкалы в номинальную;
- Б) из номинальной шкалы в ранговую;
- В) из количественной шкалы в ранговую;
- Г) из ранговой шкалы в количественную.

15. Укажите тип шкалы, в которой проведено измерение «женат – холост – разведен»:

- А) номинальная шкала;
- Б) ранговая шкала;
- В) интервальная шкала;
- Г) шкала равных отношений.

16. Укажите тип шкалы, в которой проведено измерение «закончил вуз – отчислен»:

- А) номинальная шкала;
- Б) ранговая шкала;
- В) интервальная шкала;
- Г) шкала равных отношений.

17. Укажите тип шкалы, в которой проведено измерение «высокий уровень интеллекта – средний уровень интеллекта – низкий уровень интеллекта»:

- А) номинальная шкала;
- Б) ранговая шкала;
- В) интервальная шкала;
- Г) шкала равных отношений.

18. Укажите тип шкалы, в которой проведено измерение «рост 176 см – рост 160 см – рост 180 см»:

- А) номинальная шкала;
- Б) ранговая шкала;
- В) интервальная шкала;
- Г) шкала равных отношений.

19. Укажите тип шкалы, в которой проведено измерение «коэффициент интеллектуальности $IQ = 100$ – $IQ = 92$ – $IQ = 114$ »:

- А) номинальная шкала;
- Б) ранговая шкала;
- В) интервальная шкала;
- Г) шкала равных отношений.

20. Ранжирование проводится по принципу «меньшему значению – меньший ранг». Определите ранг значения 5 в массиве данных 2, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 9, 9, 12:

- А) 3;
- Б) 4;
- В) 4,5;
- Г) 5.

21. Ранжирование проводится по принципу «меньшему значению – меньший ранг». Определите ранг значения 7 в массиве данных 2, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 9, 9, 12:

- А) 6;
- Б) 6,5;
- В) 7;
- Г) 7,5.

22. Ранжирование проводится по принципу «меньшему значению – меньший ранг». Определите ранг значения 9 в массиве данных 2, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 9, 9, 12:

- А) 8;
- Б) 8,5;
- В) 9;
- Г) 9,5.

Блок 2. Табулирование и наглядное представление данных

1. Выборка, элементы которой правильно представляют пропорции генеральной совокупности – это:

- А) большая выборка;
- Б) выборка стандартизации;
- В) репрезентативная выборка;
- Г) пилотажная выборка.

2. Случайный отбор, который производится с помощью процедуры жеребьевки – это:

- А) стратифицированный отбор;
- Б) простой отбор с помощью регулярной процедуры;
- В) серийный отбор;
- Г) простой случайный отбор.

3. Случайный отбор, при котором исследуются целые блоки элементов из генеральной совокупности – это:

- А) стратифицированный отбор;
- Б) простой отбор с помощью регулярной процедуры;
- В) серийный отбор;
- Г) простой случайный отбор.

4. Число появлений варианты x_i – это:

- А) относительная частота варианты;
- Б) частота варианты;
- В) накопленная частота варианты;
- Г) полигон частот.

5. Перечень вариант и соответствующих им частот – это:

- А) вариационный ряд;
- Б) распределение относительных частот;

- В) распределение частот;
- Г) интервальное распределение.

6. Какой этап обработки статистических данных не относится к табулированию данных:

- А) определение размаха выборки;
- Б) определение частоты каждой варианты;
- В) определение ширины интервала группирования данных;
- Г) определение границ частичных интервалов группирования данных.

7. Форма графического представления данных, для построения которой по оси абсцисс откладывают значения признака, а по оси ординат точками отмечается частота встречаемости каждого признака – это:

- А) полигон частот;
- Б) полигон относительных частот;
- В) гистограмма;
- Г) точечная диаграмма.

8. Форма графического представления данных в виде ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы шириной h , а высотой является частота n_i – это:

- А) полигон частот;
- Б) полигон относительных частот;
- В) гистограмма;
- Г) точечная диаграмма.

9. Точка на числовой прямой, которая делит исходную совокупность исходных наблюдений на две части с известными пропорциями в каждой из частей – это:

- А) квантиль;
- Б) квартиль;
- В) дециль;
- Г) процентиль.

10. Точка на числовой прямой, которая делит исходную совокупность исходных наблюдений на две части, каждая из которых пропорциональна одной или нескольким четвертым частям – это:

- А) квантиль;
- Б) квартиль;
- В) дециль;
- Г) процентиль.

11. Психолог изучает взаимосвязь между двумя свойствами у группы испытуемых. Какой объем выборки будет соответствовать цели исследования:

- А) 10;
- Б) 20;
- В) 25;
- Г) 30.

12. Психолог формирует выборку для разработки тестовых норм методики. Какой объем выборки будет соответствовать цели исследования:

- А) 30;
- Б) 50;
- В) 100;
- Г) 200.

13. Какая процедура отбора испытуемых приведет к случайной выборке, если генеральной совокупностью являются студенты-первокурсники университета:

- А) для участия в исследовании выбираются студенты, отобранные куратором каждой группы;
- Б) для исследования выбираются студенты, которые занимаются на «отлично» ;
- В) для участия в исследовании выбираются те студенты, у которых порядковый номер в списке кратен 10;
- Г) для участия в исследовании выбираются те студенты, у которых порядковый номер в списке кратен 10, а также члены группы, которые являются их друзьями.

14. Какая из вариантов имеет частоту 2 в массиве данных 2, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 9, 9, 12:

- А) 2;
- Б) 5;
- В) 9;
- Г) 12.

15. Какая из вариантов имеет относительную частоту 1/3 в массиве данных 2, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 9, 9, 12:

- А) 3;
- Б) 5;
- В) 9;
- Г) 12.

16. Какое из предложенных ниже равенств является истинным:

- А) $D_3 = Q_2$;
- Б) $D_5 = Q_2$;
- В) $D_4 = Q_3$;
- Г) $D_9 = Q_3$.

17. Какое из предложенных ниже равенств является истинным:

- А) $D_3 = P_{40}$;
- Б) $D_5 = P_{40}$;
- В) $D_6 = P_{60}$;
- Г) $D_9 = P_{99}$.

18. Какое из предложенных ниже равенств верно отражает следующее утверждение «Четвертая часть всех испытуемых читает со скоростью менее 60 слов в минуту»:

- А) $D_4 = 60$;
- Б) $Q_1 = 60$;

В) $P_{40} = 60$;

Г) $Q_1 = 55$.

19. Какое из предложенных ниже равенств верно отражает следующее утверждение «Сорок процентов всех испытуемых читают со скоростью менее 60 слов в минуту»:

А) $D_2 = 60$;

Б) $Q_1 = 60$;

В) $P_{40} = 60$;

Г) $P_4 = 60$.

**Блок 3. Вычисление основных статистических показателей:
описательные статистики**

1. Значение признака, которое делит упорядоченную выборку пополам – это:

А) мода;

Б) медиана;

В) среднее значение;

Г) размах.

2. Значение признака, которое встречается в выборке наиболее часто – это:

А) мода;

Б) медиана;

В) среднее значение;

Г) размах.

3. Мера изменчивости, равная разности наибольшего и наименьшего значения вариационного ряда – это:

А) мода;

Б) медиана;

В) дисперсия;

Г) размах.

4. Мера изменчивости, характеризующая разброс данных относительно среднего значения – это:

А) мода;

Б) медиана;

В) дисперсия;

Г) размах.

5. К мерам центральной тенденции не относится:

А) размах;

Б) медиана;

В) среднее значение;

Г) мода;

6. К мерам разброса не относится:

- А) размах;
- Б) среднее значение;
- В) дисперсия;
- Г) стандартное отклонение.

7. Характеристика выборки, показывающая, наблюдаются ли в ней преимущественные значения, больше (меньше) среднего значения – это:

- А) коэффициент вариации;
- Б) асимметрия;
- В) эксцесс;
- Г) размах.

8. Характеристика выборки, показывающая, насколько кучно расположены значения признака относительно среднего значения – это:

- А) коэффициент вариации;
- Б) асимметрия;
- В) эксцесс;
- Г) размах.

9. Параметры распределения, указывающие, где в основном расположены значения признака – это:

- А) меры центральной тенденции;
- Б) асимметрия;
- В) эксцесс;
- Г) меры разброса.

10. Параметры распределения, указывающие, насколько изменчивы значения признака – это:

- А) меры центральной тенденции;
- Б) асимметрия;
- В) эксцесс;
- Г) меры разброса.

11. Определите, чему равна медиана в вариационном ряду 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

- А) 5;
- Б) 5,5;
- В) 6;
- Г) 6,5.

12. Определите, чему равна мода в вариационном ряду 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6:

- А) 2;
- Б) 4,5;
- В) 5,5;
- Г) 6.

13. В каком из представленных ниже вариационных рядов мода является подходящей мерой центральной тенденции:

- А) 2, 2, 3, 3, 4, 4;
- Б) 2, 2, 2, 2, 2, 2;

В) 3, 3, 3, 4, 4, 4;

Г) 1, 2, 3, 4, 5, 6.

14. В каком из представленных ниже вариационных рядов дисперсия равна нулю:

А) 1, 2, 4, 4, 7, 8;

Б) 1, 1, 2, 2, 3, 3;

В) 3, 3, 3, 3, 3, 3;

Г) 4, 4, 4, 5, 5, 5.

15. В каком из представленных ниже вариационных рядов размах является неподходящей мерой разброса:

А) 2, 2, 3, 3, 4, 4;

Б) 2, 2, 2, 2, 2, 2;

В) 3, 3, 3, 4, 4, 4;

Г) 1, 2, 3, 4, 5, 6.

16. В каком из представленных ниже вариационных рядов среднее арифметическое является неподходящей мерой центральной тенденции:

А) 0, 1, 2, 0, 1, 2;

Б) 1, 2, 3, 4, 5, 6;

В) 1, 2, 3, 4, 5, 30;

Г) 2, 2, 2, 2, 2, 2.

17. В четырех группах первокурсников был вычислен средний возраст. Определите, в какой из групп студенты больше всего различаются по возрасту:

А) $\bar{x} = 17,5$; $\sigma = 0,8$;

Б) $\bar{x} = 18,1$; $\sigma = 1,2$;

В) $\bar{x} = 17,9$; $\sigma = 0,2$;

Г) $\bar{x} = 18,3$; $\sigma = 0,6$.

18. В четырех группах первокурсников был вычислен средний возраст и коэффициент вариации данных. Определите, в какой из групп можно говорить о среднем рассеянии значений признака вокруг среднего значения:

А) $v = 8\%$;

Б) $v = 22\%$;

В) $v = 18\%$;

Г) $v = 30\%$.

19. В каком из случаев распределение признака имеет правостороннюю асимметрию:

А) $A = -1,3$;

Б) $A = 0$;

В) $A = 0,3$;

Г) $A = 1,3$.

20. В каком из случаев распределение признака является островершинным:

А) $E = -1,3$;

Б) $E = 0$;

В) $E = 0,3$;

Г) $E = 1,3$.

**Блок 4. Вычисление основных статистических показателей:
случайные величины**

1. Событие, которое может произойти, а может и не произойти в данном испытании – это:

- А) достоверное событие;
- Б) невозможное событие;
- В) элементарное событие;
- Г) случайное событие.

2. Два события, которые не могут произойти вместе в одном и том же испытании – это:

- А) несовместные события;
- Б) противоположные события;
- В) равновозможные события;
- Г) случайные события.

3. Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из двух событий, называется:

- А) произведением этих событий;
- Б) суммой этих событий;
- В) разностью этих событий;
- Г) частным этих событий.

4. Событие, состоящее в совместном наступлении двух событий, называется:

- А) произведением этих событий;
- Б) суммой этих событий;
- В) разностью этих событий;
- Г) частным этих событий.

5. Отношение числа испытаний, в которых появилось событие A , к числу всех проведенных испытаний – это:

- А) вероятность события A ;
- Б) статистическая вероятность события A ;
- В) относительная частота события A ;
- Г) накопленная частота события A .

6. Множества из n элементов, каждое из которых отличается от другого только порядком элементов – это:

- А) сочетания;
- Б) размещения;
- В) перестановки;
- Г) соединения.

7. Множества из k элементов, взятых из группы в n элементов, каждое из которых отличается от другого либо хотя бы одним элементом, либо порядком их расположения – это:

- А) сочетания;
- Б) размещения;

- В) перестановки;
- Г) соединения.

8. Число сочетаний без повторения вычисляется по формуле:

- А) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$;
- Б) $P_n = n!$;
- В) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;
- Г) $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

9. Под суммой двух несовместных событий A и B понимают:

- А) совместное появление событий A и B ;
- Б) появление хотя бы одного из событий A или B ;
- В) появление либо события A , либо события B ;
- Г) появление события A и не появление события B .

10. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B вычисляется по формуле:

- А) $P(A + B) = P(A) + P(A) - P(AB)$;
- Б) $P(A + B) = P(A) + P(A)$;
- В) $P(A + B) = P(A) \times P(B)$;
- Г) $P(A + B) = P(A) \times P(B/A)$.

11. Под произведением двух событий A и B понимают:

- А) совместное появление событий A и B ;
- Б) появление хотя бы одного из событий A или B ;
- В) появление либо события A , либо события B ;
- Г) появление события A и не появление события B .

12. Вероятность произведения двух независимых событий A и B вычисляется по формуле:

- А) $P(A + B) = P(A) + P(A) - P(AB)$;
- Б) $P(A + B) = P(A) + P(A)$;
- В) $P(A + B) = P(A) \times P(B)$;
- Г) $P(A + B) = P(A) \times P(B/A)$.

13. Формула $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \times P(A/H_i)$ позволяет вычислить:

- А) полную вероятность события A ;
- Б) апостериорную вероятность событий H_i после проведения испытаний;
- В) априорную вероятность событий H_i до проведения испытаний;
- Г) относительную частоту события A .

14. Формула $P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \times P(A/H_i)}{P(A)}$ позволяет вычислить:

- А) полную вероятность события A ;
- Б) апостериорную вероятность событий H_i после проведения испытаний;
- В) априорную вероятность событий H_i до проведения испытаний;
- Г) относительную частоту события A .

15. Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно задать в виде конечной или бесконечной числовой последовательности – это:

- А) непрерывная случайная величина;
- Б) дискретная случайная величина;
- В) бинарная случайная величина;
- Г) независимая случайная величина.

16. Какой из способов задания случайной величины является неподходящим в случае непрерывной случайной величины:

- А) графический способ;
- Б) аналитический способ;
- В) табличный способ;
- Г) с помощью функции распределения.

17. Сумма произведений всех значений случайной величины на их соответствующие вероятности – это:

- А) функция распределения случайной величины;
- Б) математическое ожидание случайной величины;
- В) дисперсия случайной величины;
- Г) среднее квадратическое отклонение случайной величины.

18. Для вычисления дисперсии случайной величины используется формула:

- А) $D(X) = X - M(X)$;
- Б) $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$;
- В) $D(X) = [X - M(X)]^2$;
- Г) $D(X) = M([X - M(X)]^2)$.

19. Укажите неверное утверждение:

- А) вероятность любого события заключена между 0 и 1;
- Б) вероятность достоверного события равна 1;
- В) вероятность невозможного события равна 1;
- Г) вероятность невозможного события равна 0.

20. Вероятность выпадения четного числа очков при подбрасывании игрального кубика равна:

- А) $1/2$;
- Б) $2/3$;
- В) $1/3$;
- Г) $1/6$.

21. Если A , B и C – три произвольных события, то какое выражение отражает событие «произошло только событие A »:

- А) $A \times \bar{B} \times C$;
- Б) A ;
- В) $A \times \bar{B} \times \bar{C}$;
- Г) $A \times B \times \bar{C}$.

22. Если A , B и C – три произвольных события, то какое выражение отражает событие «не произошло только событие B »:

- А) $A \times \bar{B} \times C$;
- Б) \bar{B} ;
- В) $A \times \bar{B}$;
- Г) $\bar{B} \times C$.

Блок 5. Нормальное распределение

1. Нормальное распределение можно охарактеризовать следующими параметрами:

- А) \bar{x} и A ;
- Б) \bar{x} и E ;
- В) \bar{x} и σ ;
- Г) \bar{x} , A и E .

2. Параметр положения, который характеризует расположение графика нормального распределения на числовой оси – это:

- А) A ;
- Б) E ;
- В) σ ;
- Г) \bar{x} .

3. Параметр масштаба, который характеризует степень растяжения (сжатия) графика нормального распределения – это:

- А) A ;
- Б) E ;
- В) σ ;
- Г) \bar{x} .

4. Какие параметры задают стандартное нормальное распределение:

- А) $\bar{x} = 0$, $\sigma = 0$;
- Б) $\bar{x} = 0$, $\sigma = 1$;
- В) $\bar{x} = 1$, $\sigma = 1$;
- Г) $\bar{x} = 1$, $\sigma = 0$.

5. Каким из свойств обладает только стандартное нормальное распределение:

- А) асимметрия и эксцесс распределения равны нулю;
- Б) мода, медиана и среднее значение распределения совпадают;
- В) площадь между кривой и осью абсцисс равна единице;
- Г) кривая приближается к оси абсцисс асимптотически, никогда не касаясь ее.

6. Каким из свойств обладает только стандартное нормальное распределение:

- А) форма и положение графика распределения полностью определяются средним значением и стандартным отклонением;

Б) кривая распределения имеет две точки перегиба, которые расположены на расстоянии $\pm 1\sigma$ от среднего значения;

В) чем больше величина признака отклоняется от среднего значения, тем меньше частота его встречаемости в распределении;

Г) кривая симметрична относительно прямой $x = 0$.

7. Любое нормальное распределение может быть сведено к стандартному нормальному распределению с помощью z -преобразования, которое осуществляется по формуле:

А) $z = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$;

Б) $z = \sigma \times (\bar{x} - x_i)$;

В) $z = \sigma \times (x_i - \bar{x})$;

Г) $z = \frac{\bar{x} - x_i}{\sigma}$.

8. Какое из нормированных отклонений z может быть охарактеризовано следующим образом «значение x_i находится на расстоянии $1,5\sigma$ от среднего значения в правой части кривой»:

А) $z = -0,5$;

Б) $z = -1,5$;

В) $z = 1,5$;

Г) $z = 0,5$.

9. Какое из утверждений не соответствует правилу 3σ :

А) в диапазоне $\pm 1\sigma$ лежит 68,3% всех значений признака, распределенного по нормальному закону;

Б) в диапазоне $\pm 2\sigma$ лежит 95,5% всех значений признака, распределенного по нормальному закону;

В) в диапазоне $\pm 3\sigma$ лежит 97,9% всех значений признака, распределенного по нормальному закону;

Г) в диапазоне $\pm 3\sigma$ лежит 99,7% всех значений признака, распределенного по нормальному закону.

10. Установление соответствия между каждым стандартным значением и интервалом сырых данных – это:

А) эмпирическая нормализация;

Б) линейная стандартизация;

В) нелинейная нормализация;

Г) нелинейная стандартизация.

11. Установление соответствия процентильных границ стандартной шкалы и процентильных границ шкалы сырых оценок – это:

А) эмпирическая нормализация;

Б) линейная стандартизация;

В) нелинейная нормализация;

Г) нелинейная стандартизация.

12. Изменение содержания тестовых заданий, которое приводит эмпирическое распределение к нормальному распределению – это:

- А) эмпирическая нормализация;
- Б) линейная стандартизация;
- В) нелинейная нормализация;
- Г) нелинейная стандартизация.

13. К основным причинам отклонения распределения признака от нормального не относится:

- А) неоднородность выборки;
- Б) ограничение размаха вариаций признака;
- В) асимметричность распределения;
- Г) неравномерная чувствительность шкалы к измеряемому свойству.

14. Для некоторого признака, распределенного по нормальному закону, $\bar{x} = 25$ и $\sigma = 2$. Какое минимальное значение принимает признак:

- А) 20;
- Б) 21;
- В) 19;
- Г) 17.

15. Для некоторого признака, распределенного по нормальному закону, $\bar{x} = 25$ и $\sigma = 2$. Какое максимальное значение принимает признак:

- А) 27;
- Б) 31;
- В) 35;
- Г) 29.

Блок 6. Теория оценок

1. Количественные показатели, рассчитанные для генеральной совокупности – это:

- А) статистики;
- Б) параметры;
- В) значения признака;
- Г) оценки параметров.

2. Количественные показатели, рассчитанные для выборочной совокупности – это:

- А) статистики;
- Б) параметры;
- В) значения признака;
- Г) оценки статистик.

3. Точечная оценка параметра, для которой среднее выборочного распределения оценки равно величине оцениваемого параметра – это:

- А) состоятельная оценка;
- Б) эффективная оценка;

- В) несмещенная оценка;
- Г) смещенная оценка.

4. Точечная оценка параметра, которая при увеличении объема выборки приближается к значению оцениваемого параметра – это:

- А) состоятельная оценка;
- Б) эффективная оценка;
- В) несмещенная оценка;
- Г) смещенная оценка.

5. Точечная оценка параметра, которая при данном объеме выборки имеет наименьшую возможную дисперсию – это:

- А) состоятельная оценка;
- Б) эффективная оценка;
- В) несмещенная оценка;
- Г) смещенная оценка.

6. Какая из точечных оценок является смещенной:

- А) выборочная мода;
- Б) выборочная дисперсия;
- В) исправленная выборочная дисперсия;
- Г) выборочное среднее.

7. Какая из точечных оценок является эффективной:

- А) выборочная мода;
- Б) выборочная медиана;
- В) исправленное выборочное среднее;
- Г) выборочное среднее.

8. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака при известном генеральном среднем квадратическом отклонении вычисляется по формуле:

- А) $\bar{x} - t_{\gamma} \times \frac{S}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t_{\gamma} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$
- Б) $\bar{x} - t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$
- В) $S \times (1 - q) < \sigma(X) < S \times (1 + q)$
- Г) $S \times (1 - q) < M(X) < S \times (1 + q)$

9. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака при неизвестном генеральном среднем квадратическом отклонении вычисляется по формуле:

- А) $\bar{x} - t_{\gamma} \times \frac{S}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t_{\gamma} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$;
- Б) $\bar{x} - t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$;
- В) $S \times (1 - q) < \sigma(X) < S \times (1 + q)$;
- Г) $S \times (1 - q) < M(X) < S \times (1 + q)$.

10. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормально распределенного количественного признака по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению вычисляется по формуле:

А) $\bar{x} - t_{\gamma} \times \frac{S}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t_{\gamma} \times \frac{S}{\sqrt{n}};$

Б) $\bar{x} - t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t \times \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}};$

В) $S \times (1 - q) < \sigma(X) < S \times (1 + q);$

Г) $S \times (1 - q) < M(X) < S \times (1 + q).$

11. Величина Δ , для которой осуществляется неравенство $|M(X) - \bar{x}| < \Delta$ – это:

А) доверительная вероятность оценки параметра;

Б) надежность оценки параметра;

В) точность оценки параметра;

Г) интервальная оценка параметра.

12. Минимальный объем выборки, при котором ее можно назвать репрезентативной, зависит от следующих характеристик:

А) качества выборки (зависимая-независимая), надежности, точности оценки;

Б) однородности выборки, качества выборки (зависимая-независимая), точности оценки;

В) однородности выборки, надежности, точности оценки;

Г) однородности выборки, надежности, качества выборки (зависимая-независимая).

13. Минимальный объем репрезентативной выборки вычисляется по формуле:

А) $n = t^2 \times \frac{\sigma^2(X)}{\Delta^2};$

Б) $n = t^2 \times \frac{\Delta^2}{\sigma^2(X)};$

В) $n = \frac{\sigma^2(X)}{\Delta^2 t^2};$

Г) $n = \frac{\Delta^2}{\sigma^2(X) t^2}.$

Блок 7. Проверка статистических гипотез

1. Научно обоснованное высказывание вероятностного характера относительно сущности взаимосвязей и причин явлений объективной действительности – это:

А) статистическая гипотеза;

- Б) экспериментальная гипотеза;
- В) научная гипотеза;
- Г) направленная гипотеза.

2. Предположение о распределении признака, которое мы хотим проверить по имеющимся данным – это:

- А) статистическая гипотеза;
- Б) объяснительная гипотеза;
- В) научная гипотеза;
- Г) описательная гипотеза.

3. Предположение о причинно-следственных связях в изучаемом объекте – это:

- А) описательная гипотеза;
- Б) объяснительная гипотеза;
- В) нулевая гипотеза;
- Г) альтернативная гипотеза.

4. Предположение о том, что между статистическими показателями двух групп достоверных различий нет – это:

- А) описательная гипотеза;
- Б) объяснительная гипотеза;
- В) нулевая гипотеза;
- Г) альтернативная гипотеза.

5. Статистическая гипотеза, утверждающая только факт наличия или отсутствия различий между статистическими показателями двух групп – это:

- А) описательная гипотеза;
- Б) объяснительная гипотеза;
- В) направленная гипотеза;
- Г) ненаправленная гипотеза.

6. Какое из утверждений не относится к основным признакам правильно сформулированной научной гипотезы:

- А) гипотеза должна быть истинной;
- Б) гипотеза должна быть адекватной поставленной проблеме;
- В) гипотеза должна учитывать уже имеющиеся в науке знания по исследуемой проблеме;
- Г) гипотеза должна быть доступной для проверки.

7. Выборки, характеризующиеся тем, что каждому испытуемому одной из них можно поставить в соответствие по определенному критерию испытуемого из другой – это:

- А) независимые выборки;
- Б) зависимые выборки;
- В) репрезентативные выборки;
- Г) случайные выборки.

8. Выборки, характеризующиеся тем, что вероятность отбора любого испытуемого из одной выборки не зависит от отбора любого из испытуемых другой выборки – это:

- А) независимые выборки;

- Б) зависимые выборки;
- В) репрезентативные выборки;
- Г) случайные выборки.

9. Число данных из выборки, значения которых могут быть случайными – это:

- А) уровень статистической значимости;
- Б) объем выборки;
- В) относительная частота;
- Г) число степеней свободы.

10. Вероятность ошибки, которую мы допускаем при принятии статистической гипотезы – это:

- А) уровень статистической значимости;
- Б) доверительная вероятность;
- В) относительная частота;
- Г) число степеней свободы.

11. Число степеней свободы для независимых выборок определяется по формуле:

- А) $v = n - 1$;
- Б) $v = n_1 + n_2 - 2$;
- В) $v = n_1 + n_2 + 2$;
- Г) $v = n_1 + n_2 - 1$.

12. Решающее правило, обеспечивающее принятие истинной или отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью – это:

- А) статистическая гипотеза;
- Б) статистический критерий;
- В) научная гипотеза;
- Г) уровень статистической значимости.

13. Статистические критерии, которые включают в формулу расчета частоты или ранги и применяются при анализе данных, измеренных в номинальной или порядковой шкале – это:

- А) параметрические критерии;
- Б) непараметрические критерии;
- В) направленные критерии;
- Г) ненаправленные критерии.

14. Какая из характеристик не влияет на решение о выборе статистического критерия:

- А) характер распределения признака;
- Б) объем выборки;
- В) среднее значение признака;
- Г) тип шкалы, в которой измерен признак.

15. Определите число степеней свободы для двух зависимых выборок объема $n = 15$:

- А) $v = 16$;

- Б) $v = 14$;
- В) $v = 13$;
- Г) $v = 12$.

16. Определите число степеней свободы для двух независимых выборок, имеющих объемы $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$:

- А) $v = 27$;
- Б) $v = 26$;
- В) $v = 25$;
- Г) $v = 24$.

17. Укажите уровень значимости, при котором принимается нулевая гипотеза:

- А) $p = 0,10$;
- Б) $p = 0,05$;
- В) $p = 0,01$;
- Г) $p = 0,001$.

18. Укажите уровень значимости, на котором принимается альтернативная гипотеза:

- А) $p = 0,5$;
- Б) $p = 0,05$;
- В) $p = 0,055$;
- Г) $p = 0,10$.

Блок 8. Корреляционный анализ

1. Согласованное изменение двух или нескольких признаков – это:

- А) функциональная связь;
- Б) корреляционная зависимость;
- В) корреляционная связь;
- Г) регрессионная связь.

2. Изменения, которые вносят значения одного признака в вероятность появления разных значений другого признака – это:

- А) функциональная связь;
- Б) корреляционная зависимость;
- В) корреляционная связь;
- Г) регрессионная связь.

3. Если при увеличении одного признака уменьшается другой признак – это:

- А) положительная корреляционная связь;
- Б) криволинейная корреляционная связь;
- В) отрицательная корреляционная связь;
- Г) сильная корреляционная связь.

4. Если при уменьшении одного признака уменьшается другой признак – это:

- А) положительная корреляционная связь;

- Б) криволинейная корреляционная связь;
- В) отрицательная корреляционная связь;
- Г) сильная корреляционная связь.

5. Какой коэффициент корреляции показывает самую сильную связь:

- А) $r = -0,59$;
- Б) $r = -0,23$;
- В) $r = 0,11$;
- Г) $r = 0,38$.

6. Какой коэффициент корреляции показывает самую слабую связь:

- А) $r = -0,59$;
- Б) $r = -0,23$;
- В) $r = 0,11$;
- Г) $r = 0,38$.

7. Какое из утверждений верно характеризует коэффициент корреляции $r = 0,21$, полученный на уровне значимости $p = 0,06$:

- А) положительная средняя значимая связь;
- Б) положительная сильная значимая связь;
- В) положительная слабая незначимая связь;
- Г) отрицательная сильная незначимая связь.

8. Какое из утверждений верно характеризует коэффициент корреляции $r = -0,59$, полученный на уровне значимости $p = 0,04$:

- А) положительная средняя значимая связь;
- Б) отрицательная средняя значимая связь;
- В) отрицательная слабая значимая связь;
- Г) отрицательная сильная незначимая связь.

9. Укажите ошибку в значении коэффициента корреляции:

- А) $r = -0,71$;
- Б) $r = 1,12$;
- В) $r = 0,58$;
- Г) $r = 0,01$.

10. Какое из условий не является ограничением для применения коэффициента ранговой корреляции Спирмена:

- А) данные измерены в ранговой шкале;
- Б) распределение признаков близко к нормальному;
- В) количество сравниваемых пар признаков удовлетворяет условию $5 < n \leq 40$;
- Г) большое число связанных рангов приводит к огрубленному значению.

11. Какое из условий не является ограничением для применения коэффициента линейной корреляции Пирсона:

- А) данные измерены в ранговой шкале;
- Б) распределение признаков близко к нормальному;
- В) количество сравниваемых пар признаков удовлетворяет условию $5 < n \leq 40$;

Г) связь между признаками криволинейна.

12. Для установления взаимосвязи между переменными X и Y используется ϕ -коэффициент сопряженности, если:

А) переменная X измерена в номинальной дихотомической шкале, а переменная Y – в ранговой шкале;

Б) и переменная X , и переменная Y измерены в номинальной дихотомической шкале;

В) переменная X измерена в номинальной дихотомической шкале, а переменная Y – в количественной шкале;

Г) переменная X измерена в ранговой шкале, а переменная Y – в количественной шкале.

13. Для установления взаимосвязи между переменными X и Y используется рангово-бисериальный коэффициент корреляции, если:

А) переменная X измерена в номинальной дихотомической шкале, а переменная Y – в ранговой шкале;

Б) и переменная X , и переменная Y измерены в номинальной дихотомической шкале;

В) переменная X измерена в номинальной дихотомической шкале, а переменная Y – в количественной шкале;

Г) переменная X измерена в ранговой шкале, а переменная Y – в количественной шкале.

14. Для установления взаимосвязи между переменными X и Y используется точечный бисериальный коэффициент корреляции, если:

А) переменная X измерена в номинальной дихотомической шкале, а переменная Y – в ранговой шкале;

Б) и переменная X , и переменная Y измерены в номинальной дихотомической шкале;

В) переменная X измерена в номинальной дихотомической шкале, а переменная Y – в количественной шкале;

Г) переменная X измерена в ранговой шкале, а переменная Y – в количественной шкале.

15. Для вычисления коэффициента ранговой корреляции Спирмена используется формула:

А)
$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n \times \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1) \times \sigma_x \cdot \sigma_y};$$

Б)
$$r_s = 1 - \frac{6 \times \sum d^2}{n(n^2 - 1)};$$

В)
$$\phi = \frac{bc - ad}{(a+c) \times (b+d) \times (a+b) \times (c+d)};$$

Г)
$$r_{rb} = \frac{2}{n} \times (y_{.1} - y_{.0}).$$

16. Для вычисления коэффициента линейной корреляции Пирсона используется формула:

$$\text{А) } r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n \times \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1) \times \sigma_x \cdot \sigma_y};$$

$$\text{Б) } r_s = 1 - \frac{6 \times \sum d^2}{n(n^2 - 1)};$$

$$\text{В) } \varphi = \frac{bc - ad}{(a+c) \times (b+d) \times (a+b) \times (c+d)};$$

$$\text{Г) } r_{rb} = \frac{2}{n} \times (y_{.1} - y_{.0}).$$

17. Для вычисления коэффициента сопряженности используется формула:

$$\text{А) } r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n \times \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1) \times \sigma_x \cdot \sigma_y};$$

$$\text{Б) } r_s = 1 - \frac{6 \times \sum d^2}{n(n^2 - 1)};$$

$$\text{В) } \varphi = \frac{bc - ad}{(a+c) \times (b+d) \times (a+b) \times (c+d)};$$

$$\text{Г) } r_{rb} = \frac{2}{n} \times (y_{.1} - y_{.0}).$$

18. Для вычисления рангово-бисериального коэффициента корреляции используется формула:

$$\text{А) } r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n \times \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1) \times \sigma_x \cdot \sigma_y};$$

$$\text{Б) } r_{pb} = \frac{\bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.0}}{\sigma_y} \times \sqrt{\frac{n_{.1} \times n_{.0}}{n(n-1)}};$$

$$\text{В) } \varphi = \frac{bc - ad}{(a+c) \times (b+d) \times (a+b) \times (c+d)};$$

$$\text{Г) } r_{rb} = \frac{2}{n} \times (y_{.1} - y_{.0}).$$

19. Для вычисления точечного бисериального коэффициента корреляции используется формула:

$$\text{А) } r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n \times \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1) \times \sigma_x \cdot \sigma_y};$$

$$\text{Б) } r_{pb} = \frac{\bar{y}_{.1} - \bar{y}_{.0}}{\sigma_y} \times \sqrt{\frac{n_{.1} \times n_{.0}}{n(n-1)}};$$

$$\text{В) } \varphi = \frac{bc - ad}{(a+c) \times (b+d) \times (a+b) \times (c+d)};$$

$$\text{Г) } r_{rb} = \frac{2}{n} \times (y_{.1} - y_{.0}).$$

20. Какое из утверждений не отражает причину низкой корреляции при наличии взаимосвязи между переменными:

А) наличие выбросов;

Б) сопоставление более двух признаков;

- В) ограниченный интервал данных;
- Г) нелинейная связь между признаками.

Блок 9. Регрессионный анализ

1. Зависимость между переменными, которая позволяет установить, как изменяется зависимая переменная при изменении независимой переменной на единицу меры – это:

- А) корреляционная связь;
- Б) корреляционная зависимость;
- В) регрессия;
- Г) статистическая связь;

2. Какое из условий не является ограничением для применения регрессии:

- А) и переменная X , и переменная Y измерены в количественных шкалах;
- Б) число варьирующих признаков n в сравниваемых переменных одинаково;
- В) число варьирующих признаков n в сравниваемых переменных удовлетворяет условию $5 < n \leq 40$;
- Г) и переменная X , и переменная Y имеют нормальный закон распределения.

3. Какое из уравнений является уравнением регрессии:

- А) $Y = a_1 X^2 + a_0 X$;
- Б) $Y = a_0 + a_1 X$;
- В) $Y = a_0 + a_1 \frac{1}{X}$;
- Г) $Y = a_1 X^3 + a_0 X$.

4. Какой способ не позволяет задать линейную регрессию:

- А) способ вычисления коэффициентов регрессии;
- Б) табличный способ задания регрессии;
- В) способ построения эмпирической линии регрессии;
- Г) способ описания теоретической линии регрессии.

5. Предсказание значений зависимой переменной по известным значениям независимой переменной будет наиболее точным, если:

- А) $|r_{xy}| = 0$;
- Б) $|r_{xy}| < 1$;
- В) $|r_{xy}| > 0$;
- Г) $|r_{xy}| = 1$.

6. Между коэффициентами регрессии и коэффициентом корреляции существует взаимосвязь, которая выражается формулой:

- А) $r_{xy} = a_1 \times b_1$;
- Б) $r_{xy} = a_1 + b_1$;
- В) $r_{xy} = \frac{a_1}{b_1}$;
- Г) $r_{xy} = \sqrt{a_1 \times b_1}$.

7. Величина r_{xy}^2 , которая показывает, в какой степени изменчивость зависимой переменной обусловлена влиянием независимой – это:

- А) коэффициент корреляции;
- Б) коэффициент регрессии;
- В) коэффициент детерминации;
- Г) коэффициент сопряженности.

8. Уравнение регрессии, отражающее взаимосвязь между показателем невербального интеллекта (X) и успешностью обучения математике (Y) имеет вид $y = 1 + 0,025x$. Каков показатель средней успеваемости по математике у учащегося с показателем невербального интеллекта, равным 100:

- А) 3,5;
- Б) 1,25;
- В) 4,5;
- Г) 2,5.

9. Установлено, что существует корреляционная взаимосвязь между успешностью профессиональной деятельности и уровнем сформированности эмпатии, причем $r_{xy} = 0,4$. В какой степени успешность профессиональной деятельности может быть предсказана по уровню сформированности эмпатии:

- А) 26%;
- Б) 16%;
- В) 40%;
- Г) 80%.

10. Установлено, что существует корреляционная взаимосвязь между температурой воздуха и количеством пачек мороженого, купленного в ларьке, причем $r_{xy} = 0,8$. В какой степени количество пачек купленного мороженого может быть предсказано по температуре воздуха:

- А) 8%;
- Б) 36%;
- В) 80%;
- Г) 64%.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ

1. Понятие о математической статистике.
2. Методы математической статистики, их достоинства и недостатки.
3. Основные этапы статистической обработки данных.
4. Переменные в психологии и их виды.
5. Психологические измерения и их виды.
6. Измерительные шкалы: номинальная шкала.
7. Измерительные шкалы: порядковая шкала.
8. Измерительные шкалы: интервальная шкала.
9. Измерительные шкалы: шкала равных отношений.
10. Ранжирование и его правила.
11. Генеральная и выборочная совокупности.
12. Правила формирования выборки.
13. Критерии формирования выборки. Виды выборок.
14. Статистическое распределение частот.
15. Правила табулирования эмпирических данных.
16. Графическое представление эмпирических данных.
17. Квантили и их интерпретация.
18. Меры центральной тенденции: мода, правила для ее определения.
19. Меры центральной тенденции: медиана, правила для ее определения.
20. Меры центральной тенденции: среднее значение выборки и его свойства.
21. Взаимосвязь между мерами центральной тенденции.
22. Меры изменчивости: размах и его характеристика.
23. Меры изменчивости: дисперсия и ее свойства.
24. Меры изменчивости: среднее квадратичное отклонение и его характеристика.
25. Коэффициент вариации и его характеристика.
26. Асимметрия и ее свойства.
27. Эксцесс и его свойства.
28. Распределение признака и его виды.
29. События. Виды событий.
30. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности событий.
31. Частота события. Статистическое определение вероятности.
32. Комбинаторика и вероятность: перестановки, размещения, сочетания (с повторениями и без повторений).
33. Комбинаторика и вероятность: алгоритм выбора формулы.
34. Алгебра событий.
35. Алгебра вероятностей: теоремы сложения вероятностей.
36. Алгебра вероятностей: теоремы умножения вероятностей.
37. Формула полной вероятности.
38. Графический способ решения задач на нахождение вероятности события.
39. Формула Байеса.
40. Случайные величины и их виды.
41. Закон распределения дискретной случайной величины.

42. Закон распределения непрерывной случайной величины.
43. Математическое ожидание случайной величины и его свойства.
44. Дисперсия случайной величины и ее свойства.
45. Понятие о распределении признака. Нормальное распределение.
46. Свойства нормального распределения.
47. Интегральная теорема Лапласа.
48. Стандартное нормальное распределение.
49. Правило 3σ .
50. Применение нормального распределения: стандартизация данных.
51. Применение нормального распределения: нормализация данных.
52. Проверка нормальности распределения.
53. Причины отклонения распределения от нормального.
54. Выборочный метод и его задача.
55. Оценки параметров генеральной совокупности.
56. Точечное оценивание. Свойства точечных оценок.
57. Интервальное оценивание математического ожидания.
58. Интервальное оценивание среднего квадратичного отклонения.
59. Определение необходимого объема выборочной совокупности.
60. Понятие о гипотезе. Виды гипотез: теоретические гипотезы.
61. Виды гипотез: статистические гипотезы.
62. Статистические критерии: их структура и виды.
63. Зависимые и независимые выборки.
64. Понятие о числе степеней свободы.
65. Понятие об уровне значимости.
66. Общая схема проверки статистической гипотезы.
67. Понятие о корреляции. Корреляционная связь и корреляционная зависимость.
68. Классификация корреляционных связей по направлению и форме.
69. Классификация корреляционных связей по силе (общая и частная).
70. Наглядное представление корреляции.
71. Меры связи для качественных данных: коэффициент ранговой корреляции Спирмена.
72. Меры связи для количественных данных: коэффициент корреляции Пирсона.
73. Частные случаи коэффициента корреляции Пирсона.
74. Алгоритм выбора необходимого коэффициента корреляции.
75. Причины низкой корреляции при наличии связи между переменными.
76. Понятие о регрессионном анализе. Способы задания регрессии.
77. Линейный регрессионный анализ. Уравнение регрессии.
78. Графическое представление регрессионной связи. Метод наименьших квадратов.
79. Оценка точности прогноза.
80. Коэффициент детерминации и его свойства.
81. Нелинейная регрессия.

ЧАСТЬ II

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Тема 10 Сопоставление совокупностей по уровню и однородности признака

План:

1. Классификация задач психологического исследования и методов их решения.
2. Обоснование задачи сопоставления и сравнения.
3. Методы выявления различий в уровне исследуемого признака:
 - 3.1 Q -критерий Розенбаума;
 - 3.2 U -критерий Манна-Уитни;
 - 3.3 t -критерий Стьюдента для независимых выборок;
 - 3.4 F -критерий Фишера;
 - 3.5 H -критерий Крускала-Уоллиса;
 - 3.6 S -критерий тенденций Джонкира.
4. Алгоритм принятия решения о выборе критерия для сопоставлений.

Основные понятия и термины: Q -критерий Розенбаума, U -критерий Манна-Уитни, t -критерий Стьюдента для независимых выборок, F -критерий Фишера, H -критерий Крускала-Уоллиса, S -критерий тенденций Джонкира.

1. Классификация задач психологического исследования и методов их решения

В психологическом исследовании перед экспериментатором может стоять большое количество различных задач, которые могут быть сведены к пяти типам [27]:

1) задачи, требующие выявления различий в уровне исследуемого признака (например, необходимо установить, отличается ли уровень тревожности у юношей и девушек);

2) задачи, направленные на оценку сдвига значений исследуемого признака (например, нужно сравнить показатели уровня агрессивности подростков до и после проведения психологического тренинга, чтобы определить его эффективность);

3) задачи на выявление различий в распределении признака (например, необходимо выявить, отличается ли эмпирическое распределение от теоретического (нормального или равномерного) распределения либо сравнить распределения выбора профиля обучения (гуманитарный или естественнонаучный) юношами и девушками);

4) задачи, требующие выявления степени согласованности изменений (например, требуется определить, существует ли взаимосвязь между количеством выкуриваемых сигарет и успеваемостью студентов);

5) задачи, предполагающие анализ изменений признака под влиянием контролируемых условий (например, нужно установить, влияет ли скорость предъявления слов и их длина на количество воспроизводимых испытуемыми слов).

Для решения каждого типа задач используются определенные методы (статистические критерии).

Краткая классификация задач и методов их решения представлена в таблице 9 [9; 27]:

Таблица 9

Классификация задач и методов и решения

№	Задачи	Условия	Методы
1.	Выявление различий в уровне исследуемого признака	а) 2 выборки испытуемых	Q -критерий Розенбаума; U -критерий Манна-Уитни; φ^* -критерий (угловое преобразование Фишера); t -критерий Стьюдента для независимых выборок; F -критерий Фишера.
		б) 3 и более выборок испытуемых	H -критерий Крускала-Уоллиса; S -критерий тенденций Джонкира.
2.	Оценка сдвига значений исследуемого признака	а) 2 замера на одной и той же выборке испытуемых	T -критерий Вилкоксона; G -критерий знаков; φ^* -критерий (угловое преобразование Фишера); z -биномиальный критерий; t -критерий Стьюдента для зависимых выборок.
		б) 3 и более замеров на одной и той же выборке испытуемых	χ_r^2 -критерий Фридмана; L -критерий тенденций Пейджа.
3.	Выявление различий в распределении признака	а) при сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим	χ^2 -критерий Пирсона; λ -критерий Коломогорова-Смирнова; z -биномиальный критерий.
		б) при сопоставлении двух эмпирических распределений	χ^2 -критерий Пирсона; λ -критерий Коломогорова-Смирнова; φ^* -критерий (угловое преобразование Фишера).
4.	Выявление степени согласованности изменений	а) двух признаков	r_s – коэффициент ранговой корреляции Спирмена; r_{xy} – коэффициент линейной корреляции Пирсона и его частные случаи (φ – коэффициент сопряженности, r_{rb} – рангово-бисериальный коэффициент корреляции, r_{pb} – точечный бисериальный коэффициент корреляции).
		б) двух иерархий или профилей	r_s – коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

№	Задачи	Условия	Методы
5.	Анализ изменений признака под влиянием контролируемых условий	а) под влиянием одного фактора	Однофакторный дисперсионный анализ Фишера; <i>S</i> -критерий тенденций Джонкира; <i>L</i> -критерий тенденций Пейджа.
		б) под влиянием двух факторов одновременно	Двухфакторный дисперсионный анализ Фишера.

Для того чтобы принять решение о выборе метода математической обработки данных, необходимо определить, какой тип задач решается в исследовании, проанализировать условия решения задачи (например, сколько выборок обследовано) и выбрать соответствующий критерий с учетом его ограничений.

2. Обоснование задачи сопоставления и сравнения

Задачу сопоставления и сравнения данных исследователь решает в двух случаях [27].

Во-первых, когда необходимо выявить различия между двумя, тремя и более группами испытуемых по исследуемому признаку. Например, сравнить удовлетворенность трудом работников государственных и частных организаций или эмоциональное выгорание у педагогов, имеющих различный стаж работы (до 5 лет, 6-10 лет, 11-15 лет).

Во-вторых, если необходимо сформировать «групповой профиль» («усредненный портрет») представителя определенной профессии, социальной группы (например, портрет «успешного студента», «успешного менеджера»). В этом случае может быть обследована одна выборка численностью не менее 60 человек. Внутри этой выборки выделяют группы, отличающиеся по степени успешности. Возможны следующие варианты деления выборки на группы:

а) определяют среднее значение признака \bar{x} и тех испытуемых, показатели которых больше среднего, относят к успешным, а остальных – к неуспешным. Однако такое деление является достаточно грубым: испытуемые, получившие близкие оценки по успешности, могут оказаться в разных группах, а лица, существенно различающиеся по оценкам успешности, – в одной группе;

б) вычисляют среднее значение \bar{x} и стандартное отклонение σ признака. Испытуемых, чьи показатели превышают среднее значение не менее чем на $1/4\sigma$, относят к успешным, а тех лиц, у которых показатели ниже среднего значения не менее чем на $1/4\sigma$, относят к неуспешным. При этом все испытуемые, имеющие показатели $\bar{x} \pm 1/4\sigma$, исключаются из сопоставления. В случае нормального распределения это примерно 19,8% испытуемых;

в) чтобы избежать потерь, выборку делят на три группы: с высоким, средним и низким уровнями успешности. К лицам, имеющим высокий уровень успешности, относят испытуемых, результаты которых превышают \bar{x} не менее чем на $1/2\sigma$. К лицам, имеющим низкий уровень успешности, – тех, чьи результаты ниже \bar{x} не менее чем на $1/2\sigma$. Испытуемые, имеющие показатели $\bar{x} \pm 1/2\sigma$, отно-

сятся к лицам со средним уровнем успешности. При таком строгом делении в группы с высокой и низкой успешностью попадают (при нормальном распределении) по 30,9% испытуемых, а к группе со средней успешностью относится около 39,2% лиц.

При этом чем меньше испытуемых оказывается в группах, тем меньше у исследователя возможностей для выявления достоверных различий, поскольку критические значения большинства критериев при малых n строже, чем при больших n .

3. Методы выявления различий в уровне исследуемого признака

Для выявления достоверности различий в уровне исследуемого признака используется ряд статистических критериев.

3.1 Q-критерий Розенбаума [27]

Назначение. Позволяет оценить различия между двумя выборками по уровню количественно измеренного признака, который варьирует в достаточном диапазоне значений.

Описание. Критерий может быть применен к данным, которые измерены, по крайней мере, в порядковой шкале. Он требует достаточно тонко измеренных признаков, иначе сопоставление невозможно (например, если признак принимает всего три значения: 1,2,3). Критерий является достаточно простым непараметрическим методом оценки достоверности различий между двумя выборками. Два сравниваемых ряда значений располагают друг под другом так, чтобы можно было подсчитать так называемые «хвосты» S_1 и S_2 .

Графически Q-критерий можно представить следующим образом [14]:

```

xxxx|xxxxxxxxx| S2
S1 |yyyyyyyyyy|yyyyy,

```

где x – значения признака в первой выборке,

y – значения признака во второй выборке.

Поэтому этот метод имеет также название «критерий хвостов».

Если Q-критерий не выявляет различий, это еще не значит, что их нет. В этом случае следует применить φ^* -критерий Фишера.

Ограничения:

1) $n_1 \geq 11$, $n_2 \geq 11$, объемы выборок примерно равны;

а) если $n_1 + n_2 < 50$, то $|n_1 - n_2| \leq 10$;

б) если в каждой из выборок больше 51 наблюдения, но меньше 100, то $|n_1 - n_2| \leq 20$;

в) если в каждой из выборок больше 100 наблюдений, то допускается, чтобы одна выборка была больше другой не более чем в 1,5–2 раза;

2) диапазоны разброса значений в двух выборках не должны совпадать между собой.

Гипотезы:

H_0 : уровень признака в выборке 1 не превышает уровня признака в выборке 2.

H_1 : уровень признака в выборке 1 превышает уровень признака в выборке 2.

Алгоритм:

1. Проверить, выполняются ли ограничения $n_1 \geq 11$, $n_2 \geq 11$ и $n_1 \approx n_2$.
2. Упорядочить значения отдельно в каждой выборке по убыванию признака. Считать первой выборкой ту, значения в которой предположительно выше.
3. Определить максимальное значение в выборке 2.
4. Подсчитать количество значений в выборке 1, которые выше максимального значения в выборке 2. Обозначить полученную величину как S_1 .
5. Определить минимальное значение в выборке 1.
6. Подсчитать количество значений в выборке 2, которые ниже минимального значения выборки 1. Обозначить полученную величину как S_2 .
7. Подсчитать эмпирическое значение Q по формуле $Q_{эмп} = S_1 + S_2$.
8. По таблице критических значений определить значения Q для данных n_1 и n_2 (Приложение 9). Если $Q_{эмп} \geq Q_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 отвергается.
9. При $n_1, n_2 > 26$ сопоставить полученное эмпирическое значение $Q_{эмп}$ с $Q_{кр} = 8$ ($p \leq 0,05$) и $Q_{кр} = 10$ ($p \leq 0,01$). Если $Q_{эмп}$ превышает или равно $Q_{кр} = 8$, то H_0 отвергается.

Пример 1 [9]. Используя тест Векслера, психолог определил показатели вербального интеллекта у 11 городских и 12 сельских школьников. Показатели интеллекта представлены в таблице:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Городские школьники	134	96	100	130	104	126	104	120	120	120	120	
Сельские школьники	76	120	82	82	118	84	110	88	104	102	100	96

Можно ли утверждать, что одна из выборок превосходит другую по уровню вербального интеллекта?

Решение. Первой выборкой будем считать городских школьников, поскольку значения признака в ней выше. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : уровень вербального интеллекта в выборке городских школьников не превышает уровня вербального интеллекта в выборке сельских школьников.

H_1 : уровень вербального интеллекта в выборке городских школьников превышает уровень вербального интеллекта в выборке сельских школьников.

Представим результаты измерения в виде, удобном для расчета Q-критерия Розенбаума, расположив числа в порядке убывания и одно измерение под другим:

134, 130, 126, |120, 120, 120, 120, 104, 104, 100, 96|

|120, 118, 110, 104, 102, 100, 96,| 88, 84, 82, 82, 76

В этом случае $S_1 = 3$ и $S_2 = 5$. Тогда $Q_{эмп} = S_1 + S_2 = 5 + 3 = 8$.

По таблице Приложения 8 находим критические значения для $n_1 = 11$ и $n_2 = 12$:

$$Q_{кр} = \begin{cases} 7, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 9, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

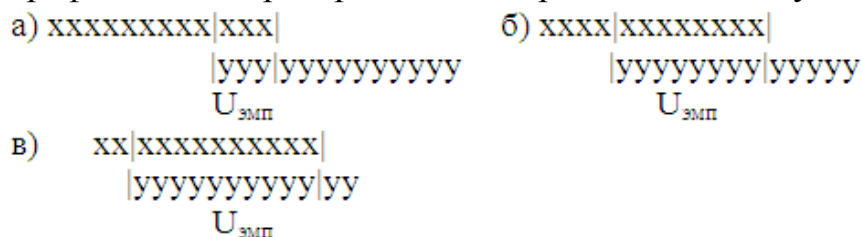
Тогда $Q_{эмп} > Q_{кр}$ при уровне значимости $p \leq 0,05$. Следовательно, H_0 отвергается, H_1 принимается, т.е. учащихся городской школы превосходят учащихся сельской школы по уровню вербального интеллекта при уровне значимости $p < 0,05$.

3.2 U-критерий Манна-Уитни [27]

Назначение. Используется для оценки различий между двумя выборками по уровню признака, количественно измеренного.

Описание. Критерий позволяет выявить различия между малыми выборками и является более мощным, чем критерий Розенбаума. Этот метод определяет, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между двумя рядами значений признака. Первым рядом считаем тот, значения в котором предположительно выше. Чем меньше перекрещивающихся значений, тем более вероятно, что различия достоверны. Эмпирическое значение критерия отражает, насколько велика зона совпадения между рядами. Поэтому чем меньше $U_{эм}$, тем более вероятно, что различия достоверны

Графически U-критерий можно представить следующим образом [14]:



В случае (а) область наложения слишком мала, чтобы скрадывать различия между рядами, поэтому высока вероятность достоверности различий. В случае (в) область наложения настолько обширна, что различия между рядами скрадываются.

Ограничения:

- 1) $n_1 \geq 3, n_2 \geq 3$; если $n_1 = 2$, то $n_2 \geq 5$;
- 2) $n_1 \leq 60, n_2 \leq 60$.

Гипотезы:

H_0 : уровень признака в выборке 1 не превышает уровня признака в выборке 2.

H_1 : уровень признака в выборке 1 превышает уровень признака в выборке 2.

Алгоритм:

1. Выписать все значения обеих выборок в один вариационный ряд, выделяя значения первой выборки, например, красным цветом, а значения второй – синим.
2. Проранжировать значения, приписывая меньшему значению меньший ранг. Всего рангов получится $n_1 + n_2$.
3. Подсчитать отдельно сумму рангов значений первой выборки (обозначенных красным цветом) и сумму рангов значений второй выборки (обозначенных синим цветом). Проверить, совпадает ли общая сумма рангов с расчетной, воспользовавшись формулой $\frac{n(n+1)}{2}$, где n – общее количество ранжируемых значений.
4. Определить большую из двух ранговых сумм, обозначив ее T_x .
5. Определить эмпирическое значение критерия по формуле

$$U_{эм} = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} - T_x,$$

где n_1 и n_2 – количество испытуемых в выборке 1 и выборке 2 соответственно;
 n_x – количество испытуемых в выборке с большей ранговой суммой.

6. По таблице критических значений определить критические значения U для данных n_1 и n_2 (Приложение 10). Если $U_{эмп} > U_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 принимается. Если $U_{эмп} \leq U_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 отвергается. Чем меньше значения $U_{эмп}$, тем достоверность различий выше.

Необходимо отметить, что U -критерий является *исключением* из общего правила принятия решения о достоверности различий: мы можем констатировать достоверные различия в уровне выраженности признака, если $U_{эмп} \leq U_{кр}$.

Пример 2 [9]. Две группы испытуемых – контрольная и экспериментальная – решали техническую задачу. Показателем успешности решения служило время ее решения. Испытуемые экспериментальной группы получали дополнительную мотивацию в виде денежного вознаграждения. Показатели времени решения технической задачи представлены в таблице:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Контрольная группа	46	8	50	45	32	41	41	31	55
Экспериментальная группа	39	38	44	6	25	25	30	43	

Можно ли утверждать, что денежное вознаграждение влияет на успешность решения задачи?

Решение. Первой выборкой будем считать контрольную группу, поскольку значения признака в ней выше. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : время решения задачи в контрольной выборке не превышает время решения задачи в экспериментальной выборке.

H_1 : время решения задачи в контрольной выборке превышает время решения задачи в экспериментальной выборке.

Представим результаты измерения в виде, удобном для расчета U -критерия Манна-Уитни. Для этого расположим значения обеих выборок в один вариационный ряд, выделяя значения первой выборки курсивом, а значения второй – жирным шрифтом:

6, 8, 25, 25, 30, 31, 32, 38, 39, 41, 41, 43, 44, 45, 46, 50, 55.

Проранжируем значения по правилу «меньшему значению – меньший ранг», используя правила ранжирования связанных рангов:

Значения	6	8	25	25	30	31	32	38	39	41	41	43	44	45	46	50	55
Ранги	1	2	3,5	3,5	5	6	7	8	9	10,5	10,5	12	13	14	15	16	17

Вычислим сумму рангов для первой выборки: $2 + 6 + 7 + 10,5 + 10,5 + 14 + 15 + 16 + 17 = 98$.

Вычислим сумму рангов для второй выборки: $1 + 3,5 + 3,5 + 5 + 8 + 9 + 12 + 13 = 55$.

Вычислим общую сумму рангов: $55 + 98 = 153$. Она равна расчетной сумме рангов, полученной по формуле $17 \cdot (17 + 1) / 2 = 17 \cdot 18 / 2 = 306 / 2 = 153$.

Большую ранговую сумму имеет первая выборка: $T_x = 98$.

Тогда $U_{эмп} = n_1 \cdot n_2 + n_x(n_x + 1) / 2 - T_x = 8 \cdot 9 + 9(9 + 1) / 2 - 98 = 72 + 45 - 98 = 117 - 98 = 19$.

По таблице Приложения 9 находим критические значения U -критерия для $n_1 = 8$ и $n_2 = 9$:

$$U_{кр} = \begin{cases} 18, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 11, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $U_{эмп} > U_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 принимается, т.е. время решения задачи в контрольной выборке не превышает время решения задачи в экспериментальной выборке. Это означает, что денежное вознаграждение не приводит к статистически значимому повышению эффективности решения технической задачи испытуемыми.

Расчет U -критерия Манна-Уитни можно производить с помощью универсальных статистических пакетов [10, с. 120–125].

3.3 *t*-критерий Стьюдента для независимых выборок [12, 14]

Назначение. Позволяет оценить различия средних значений \bar{x}_1 и \bar{x}_2 двух выборок, данные которых распределены по нормальному закону.

Описание. Это мощный параметрический критерий, дающий достоверные результаты даже если выборки малы. Он основывается на сравнении средних значений двух выборок.

Ограничения:

- 1) данные измерены в количественных шкалах;
- 2) распределение признака в обеих выборках соответствует закону нормального распределения;
- 3) суммарный объем выборок должен быть не менее 30 (для $p = 0,05$) и не менее 100 (для $p = 0,01$);
- 4) объемы двух выборок не должны существенно отличаться друг от друга (не более чем в 1,5-2 раза).

Гипотезы:

H_0 : среднее значение признака в выборке 1 достоверно не отличается от среднего значения признака в выборке 2.

H_1 : среднее значение признака в выборке 1 достоверно отличается от среднего значения признака в выборке 2.

Алгоритм:

1. Вычислить статистики первой выборки \bar{x}_1 и σ_1 .
2. Вычислить статистики второй выборки \bar{x}_2 и σ_2 .
3. Вычислить число степеней свободы для независимых выборок объема n_1 и n_2 : $\nu = n_1 + n_2 - 2$.
4. Вычислить эмпирическое значение *t*-критерия по формуле

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

5. По таблице определить критические значения $t_{кр}$ для соответствующего числа степеней свободы ν (Приложение 7). Если $|t_{\text{эмп}}| \geq t_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 отвергается. Если $|t_{\text{эмп}}| < t_{кр}$, то H_0 принимается.

Пример 3 [9]. Психолог измерял время сложной сенсомоторной реакции (в мс) у испытуемых контрольной и экспериментальной групп. В экспериментальную группу входили 9 спортсменов, а в контрольную – 8 человек, не занимающихся активно спортом. С помощью критерия Стьюдента определить, отличается ли средняя скорость сенсомоторной реакции у спортсменов и у людей, не занимающихся спортом?

Решение. Результаты эксперимента представим в виде таблицы и произведем в ней необходимые расчеты.

№ п.п.	Экспериментальная группа (X)	Контрольная группа (Y)	Отклонение от среднего		Квадраты отклонений	
			$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	504	580	-22	-58	484	3368
2	560	692	34	54	1156	2916

№ п.п.	Экспериментальная группа (X)	Контрольная группа (Y)	Отклонение от среднего		Квадраты отклонений	
			$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
3	420	700	-106	62	11236	3844
4	600	621	74	-17	5476	289
5	580	640	54	-2	2916	4
6	530	561	4	-77	16	5929
7	490	680	-36	42	1296	1764
8	580	630	54	-8	2916	64
9	470	-	-56	-	3136	-
Сумма	4734	5104	0	0	28632	18174

Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : среднее время сенсомоторной реакции в экспериментальной выборке достоверно не отличается от среднего времени сенсомоторной реакции в контрольной выборке.

H_1 : среднее время сенсомоторной реакции в экспериментальной выборке достоверно отличается от среднего времени сенсомоторной реакции в контрольной выборке.

Вычислим среднее значение для каждой выборки:

$$\bar{x}_1 = 4734:9 = 526; \bar{x}_2 = 5104:8 = 638.$$

Вычислим дисперсию для каждой выборки:

$$D_1 = \sigma_1^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 / (n - 1) = 28632:8 = 3579.$$

$$D_2 = \sigma_2^2 = \Sigma(y_i - \bar{y})^2 / (n - 1) = 18174:7 \approx 2596.$$

Найдем число степеней свободы для выборок объема $n_1 = 9$ и $n_2 = 8$: $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 9 + 8 - 2 = 15$.

Вычислим эмпирическое значение критерия:

$$t_{эм} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) : \sqrt{(\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2)} = (526 - 638) : \sqrt{(3579/9 + 2596/8)} = (-112) : \sqrt{(397,7 + 324,5)} \approx (-112) : \sqrt{722,2} \approx (-112) : 26,87 \approx -4,18.$$

По таблице Приложения 7 находим критические значения t-критерия для числа степеней свободы $\nu = 15$:

$$t_{кр} = \begin{cases} 2,13, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 2,95, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $|t_{эм}| > t_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,01$. Следовательно, H_0 отклоняется и принимается H_1 , т.е. скорость сенсомоторной реакции у спортсменов достоверно отличается от аналогичного показателя у лиц, не занимающихся спортом.

Расчет t-критерия Стьюдента для независимых выборок удобно производить с помощью статистических пакетов [10, с. 139–142].

3.4 F-критерий Фишера [12; 14]

Иногда две выборочные совокупности, не различаясь значимо по своим средним значениям, могут различаться по дисперсиям. В этом случае для выявления достоверности различий используется F-критерий Фишера.

Назначение. Используется для оценки достоверности различий дисперсий двух выборок, которые распределены по нормальному закону.

Описание. Это параметрический критерий, который основывается на сравнении дисперсий двух выборок. Для вычисления $F_{эм}$ нужно определить отношение дисперсий двух выборок, причем большая по величине дисперсия находится в числителе, а меньшая в знаменателе.

Ограничения:

- 1) данные измерены в количественных шкалах;
- 2) распределение признака в обеих выборках должно соответствовать закону нормального распределения;
- 3) суммарный объем выборок должен быть не менее 30 (для $p = 0,05$) и не менее 100 (для $p = 0,01$);
- 4) объемы двух выборок могут существенно отличаться друг от друга (более чем в 2 раза).

Гипотезы:

H_0 : дисперсия признака в выборке 1 достоверно не отличается от дисперсии признака в выборке 2.

H_1 : дисперсия признака в выборке 1 достоверно не отличается от дисперсии признака в выборке 2.

Алгоритм:

1. Вычислить дисперсию первой выборки σ_1 .
2. Вычислить дисперсию второй выборки σ_2 .
3. Вычислить число степеней свободы для выборок объема n_1 и n_2 : $\nu_1 = n_1 - 1$ и $\nu_2 = n_2 - 1$.
4. Вычислить эмпирическое значение F -критерия по формуле

$$F_{\text{эмп}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}.$$

В данной формуле σ_1 – это всегда дисперсия с большим значением, а σ_2 – с меньшим.

5. По таблице критических значений определить критические значения $F_{кр}$ для соответствующего числа степеней свободы ν_1 и ν_2 . Если $F_{\text{эмп}} \geq F_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 отвергается. Если $F_{\text{эмп}} < F_{кр}$, то H_0 принимается.

Таблица критических значений для F -критерия существует в двух вариантах: одна – для сравнения дисперсий, вторая – для дисперсионного анализа. В нашем случае необходимо использовать первый вариант таблицы (Приложение 11) [12].

Пример 4 [13]. Психолог измерял математические способности у 13 юношей и 11 девушек. Максимальный показатель по тесту – 10 баллов. Обе группы имеют относительно близкие значения средней арифметической, но вариативность показателей в группах различна. Различаются ли юноши и девушки по показателю математических способностей?

Решение. Результаты эксперимента представим в виде таблицы, в которой произведем необходимые расчеты:

№ п.п.	Юноши (X)	Девушки (Y)	Отклонение от среднего		Квадраты отклонений	
			$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	5	7	-1	0	1	0
2	8	5	2	-2	4	4
3	10	5	4	-2	16	4
4	5	8	-1	1	1	1

№ п.п.	Юноши (X)	Девушки (Y)	Отклонение от среднего		Квадраты отклонений	
			$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
5	9	7	3	0	9	0
6	7	6	1	-1	1	1
7	3	7	-3	0	9	0
8	8	8	2	1	4	1
9	9	10	3	3	9	9
10	2	7	-4	0	16	0
11	4	7	-2	0	4	0
12	3	-	-3	-	9	-
13	5	-	-1	-	1	-
Сумма	78	77	0	0	84	20
Среднее	6	7				

Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : дисперсия показателей математических способностей юношей достоверно не отличается от дисперсии показателей математических способностей девушек.

H_1 : дисперсия показателей математических способностей юношей достоверно отличается от дисперсии показателей математических способностей девушек.

Вычислим дисперсию для обеих выборок:

$$\sigma_1 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 / (n_1 - 1) = 84/12 = 7; \sigma_2 = \Sigma(y_i - \bar{y})^2 / (n_2 - 1) = 20/10 = 2.$$

Вычислим число степеней свободы для обеих выборок: $\nu_1 = n_1 - 1 = 13 - 1 = 12$ и $\nu_2 = 11 - 1 = 10$.

Вычислим эмпирическое значение F -критерия: $F_{эм} = \sigma_1 / \sigma_2 = 7/2 = 3,5$.

Определим критические значения $F_{кр}$ для соответствующего числа степеней свободы $\nu_1 = 12$ и $\nu_2 = 10$ по таблице Приложения 11. Значения $\nu = 12$ в таблице нет. Воспользуемся наиболее близким к нему значением $\nu = 10$. Тогда $F_{кр} = 3,717$ при $p = 0,05$. Следовательно, $F_{эм} < F_{кр}$. Значит, H_0 принимается, т.е. не существует достоверных различий показателей дисперсий математических способностей юношей и девушек.

Расчет F -критерия Фишера можно также производить с помощью статистических пакетов [10, с. 154–155].

3.5 H -критерий Крускала-Уоллиса [27]

Назначение. Позволяет оценить различия одновременно между тремя, четырьмя и более выборками по уровню какого-либо признака.

Описание. Позволяет установить, что уровень признака изменяется при переходе от выборки к выборке, но не указывает направление этих изменений. Является продолжением U -критерия Манна-Уитни на большее чем два число сопоставляемых выборок. Количество сравниваемых выборок обозначается c .

Ограничения:

- 1) используется для сравнения трех и более выборок: $c \geq 3$;
- 2) для установления различий на более высоком уровне значимости ($p \leq 0,01$) необходимо, чтобы $n_1 \geq 3$, $n_2 \geq 3$; $n_3 \geq 3$ или $n_1 = 4$, $n_2 = 2$; $n_3 = 2$.
- 3) при сравнении трех выборок допускается $n_1 = 3$, $n_2 = 2$; $n_3 = 2$, но в этом случае возможно установление различий только на уровне значимости $p \leq 0,05$;

4) если $c = 3$, то для определения критических значений пользуются таблицей Приложения 11. При $c > 3$ критические значения определяются по таблице для критерия χ^2 . Количество степеней свободы при этом определяется по следующей формуле: $v = c - 1$.

5) при множественном сравнении выборок достоверные различия между конкретной парой могут оказаться стертыми. Это ограничение можно преодолеть, используя попарные сравнения с помощью критерия Манна-Уитни или ϕ^* – угловое преобразование Фишера.

Гипотезы:

H_0 : c выборок испытуемых не различаются по уровню исследуемого признака.

H_1 : c выборок испытуемых различаются по уровню исследуемого признака.

Алгоритм:

1. Выписать значения всех выборок в один вариационный ряд, обозначая значения каждой выборки своим цветом.

2. Проранжировать значения вариационного ряда по правилу «меньшему значению – меньший ранг». Общее количество рангов будет равно числу испытуемых в объединенной выборке.

3. Расщепить общую выборку на исходные выборки и определить сумму рангов в каждой из них. Проверить совпадение суммы рангов с расчетной.

4. Вычислить эмпирическое значение H -критерия по формуле

$$H_{\text{эм}} = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum \frac{T_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N+1),$$

где N – количество испытуемых в объединенной выборке, n_i – количество испытуемых в отдельной выборке, T_i – сумма рангов в отдельной выборке.

5. При $c = 3$ и $n_1, n_2, n_3 \leq 5$ определить критические значения и соответствующий им уровень значимости по таблице критических значений для критерия Крускала–Уоллиса (Приложение 12). Если $H_{\text{эм}} \geq H_{\text{кр}}$ при $p = 0,05$, то H_0 отвергается.

6. При $c > 3$ или количестве испытуемых $n_1, n_2, n_3 > 5$ критические значения определить по таблице критических значений для критерия χ^2 . Если $H_{\text{эм}} \geq \chi^2_{\text{кр}}$ при $p = 0,05$, то H_0 отвергается.

Пример 4 [9]. Четыре группы испытуемых выполняли тест Бурдона в различных экспериментальных условиях. Психолог фиксировал число ошибок показателя переключаемости внимания в процентах для каждой группы:

0 группа: 23, 20, 34, 35; 3 группа: 34, 24, 25, 40;

1 группа: 45, 12, 34, 11; 4 группа: 21, 22, 26, 27.

Зависит ли эффективность выполнения теста от условий, в которых он выполнялся?

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : четыре выборки не различаются по эффективности выполнения теста.

H_1 : четыре выборки не различаются по эффективности выполнения теста.

Представим результаты измерения в виде, удобном для расчета H -критерия Крускала–Уоллиса, расположив значения всех выборок в один вариационный ряд. Выделим значения

первой выборки курсивом, значения второй – жирным шрифтом, значения третьей выборки подчеркнем, значения четвертой выделять не будем.

11, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 34, 34, 35, 40, 45.

Проранжируем значения по правилу «меньшему значению – меньший ранг», используя правила ранжирования связанных рангов:

Значения	11	12	20	21	22	23	<u>24</u>	<u>25</u>	26	27	34	<u>34</u>	34	35	<u>40</u>	45
Ранги	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	12	12	14	15	16

Вычислим сумму рангов для первой выборки, выделенной курсивом: $3 + 6 + 12 + 14 = 35$.

Вычислим сумму рангов для второй выборки, выделенной жирным шрифтом: $1 + 2 + 12 + 16 = 31$.

Вычислим сумму рангов для третьей выборки, выделенной подчеркиванием: $7 + 8 + 12 + 15 = 42$.

Вычислим сумму рангов для четвертой выборки: $4 + 5 + 9 + 10 = 28$.

Вычислим общую сумму рангов: $35 + 31 + 42 + 28 = 136$. Она равна расчетной сумме рангов, полученной по формуле $16 \cdot (16 + 1) / 2 = 16 \cdot 17 / 2 = 272 / 2 = 136$.

Вычислим эмпирическое значение H -критерия по формуле

$H_{эм} = 12 \cdot [N \cdot (N + 1)] \times \sum T_i^2 / n_i - 3 \cdot (N + 1) = 12 \cdot [16 \cdot (16 + 1)] \times [35^2 / 4 + 31^2 / 4 + 42^2 / 4 + 28^2 / 4] - 3 \cdot (16 + 1) = 12 \cdot (16 \cdot 17) \times [(35^2 + 31^2 + 42^2 + 28^2) / 4] - 3 \cdot 17 = 12 \cdot 272 \times [(1225 + 961 + 1764 + 784) / 4] - 51 = 12 \cdot 272 \times (4734 / 4) - 51 = 52,21 - 51 = 1,21$.

При определении критического значения H -критерия применительно к четырем и более выборкам воспользуемся таблицей критических значений для критерия χ^2 , подсчитав предварительно число степеней свободы для четырех выборок: $v = c - 1 = 4 - 1 = 3$.

$$H_{кр} = \begin{cases} 7,815, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 11,345, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $H_{эм} < H_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 принимается, исследуемые выборки не различаются по эффективности выполнения теста, т.е. условия его выполнения не влияют на эффективность выполнения теста.

Рассчитать H -критерий Крускала-Уоллиса можно также с помощью универсальных статистических пакетов [10, с. 128–133].

3.6 S-критерий тенденций Джонкира [27]

Назначение. Предназначен для выявления тенденций изменения признака при переходе от выборки к выборке в случае сопоставления трех и более выборок.

Описание. Позволяет упорядочить обследованные выборки по какому-либо признаку, т.е. дает возможность утверждать, что на первом месте по выраженности изучаемого признака стоит выборка В, на втором – выборка А, на третьем – выборка С. При этом возможны два варианта:

а) выборки различаются по качественному признаку (профессии, национальности). С помощью S -критерия их можно упорядочить по количественно измеренному признаку (креативности, тревожности и т.д.);

б) выборки различаются по количественному признаку (возраст, стаж). Их можно упорядочить с помощью S -критерия по другому количественному признаку, устанавливая при этом меру связи между двумя количественными признаками. Например, мы можем показать, что при переходе от младшей возра-

тной группы к старшей гибкость снижается, а фрустрационная толерантность возрастает.

Меру связи между количественно измеренными переменными можно установить также с помощью коэффициентов ранговой корреляции r_s или линейной корреляции r_{xy} . Однако S -критерий тенденций Джонкира имеет перед ними ряд преимуществ:

- он более прост в подсчете;
- он применим в случае, когда один из признаков варьирует в узком диапазоне (3-4 значения). При применении коэффициента ранговой корреляции в этом случае мы получаем огрубленный результат, нуждающийся в поправке на одинаковые ранги.

Ограничения:

1) используется для сравнения не менее трех и не более шести выборок: $3 \leq c \leq 6$;

2) объем сравниваемых выборок должен быть одинаков; в противном случае нужно искусственно уравнивать выборки, утратив при этом часть полученных наблюдений;

3) возможно сравнение не менее двух и не более десяти наблюдений в каждой выборке: $2 \leq n \leq 10$.

При большем количестве выборок или большем количестве наблюдений необходимо пользоваться H -критерием Крускала–Уоллиса.

Гипотезы:

H_0 : тенденция возрастания значений при переходе от выборки к выборке является случайной.

H_1 : тенденция возрастания значений при переходе от выборки к выборке не является случайной.

Алгоритм:

1. Уровнять объем выборок, ориентируясь на число наблюдений в меньшей из групп.

2. Упорядочить значения в каждой группе по возрастанию. Занести данные в столбцы таблицы, помещая в первый столбец выборку с наименьшими значениями.

3. Начиная с крайнего левого столбца для каждого значения подсчитать количество превышающих его значений в столбцах, расположенных справа (S_i).

4. Подсчитать сумму превышений по столбцам и общую сумму всех превышений: $A = \sum S_i$.

5. Подсчитать максимально возможное число превышающих значений B , которое получилось бы, если бы все значения справа были выше значений слева:

$$B = \frac{c(c-1)}{2} \cdot n^2, \text{ где } c - \text{число групп, } n - \text{число наблюдений в каждой группе.}$$

6. Вычислить эмпирическое значение критерия по формуле $S_{эм} = 2A - B$.

7. Определить $S_{кр}$ по таблице критических значений для количества групп c и количества наблюдений n (Приложение 13).

Если $S_{эм} \geq S_{кр}$ при $p = 0,05$, то H_0 отвергается.

Пример 5 [9]. Четыре группы испытуемых выполняли тест Бурдона в различных экспериментальных условиях. Психолог фиксировал число ошибок показателя переключаемости внимания в процентах для каждой группы:

1-я группа: 23, 20, 34, 35; 3-я группа: 34, 24, 25, 40;

2-я группа: 45, 12, 34, 11; 4-я группа: 21, 22, 26, 27.

Наблюдается ли тенденция к увеличению ошибок переключения внимания при выполнении теста разными испытуемыми в зависимости от условий его выполнения?

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : тенденция увеличения ошибок при переходе от выборки к выборке (слева направо) является случайной.

H_1 : тенденция увеличения ошибок при переходе от выборки к выборке (слева направо) не является случайной.

Для расчета S -критерия тенденций предварительно упорядочим данные внутри каждой выборки по возрастанию:

1-я группа: 20, 23, 34, 35; 3-я группа: 24, 25, 34, 40;

2-я группа: 11, 12, 34, 45; 4-я группа: 21, 22, 26, 27.

Занесем данные в столбцы таблицы, помещая в первый столбец выборку с наименьшими значениями. Подсчитаем для каждого значения количество превышающих его значений, расположенных в столбцах справа.

№	Группа 4		Группа 2		Группа 1		Группа 3
	Индивидуальные значения	S_i	Индивидуальные значения	S_i	Индивидуальные значения	S_i	Индивидуальные значения
1.	21	(9)	11	(8)	20	(4)	24
2.	22	(9)	12	(8)	23	(4)	25
3.	26	(6)	34	(2)	34	(1)	34
4.	27	(6)	45	(0)	35	(1)	40
Σ		(30)		(18)		(10)	

Вычислим общую сумму всех превышений: $A = \Sigma S_i = 30 + 18 + 10 = 58$.

Подсчитаем максимально возможное число превышающих значений B по формуле

$$B = c(c-1):2 \times n^2 = 4 \cdot (4-1):2 \times 4^2 = 4 \cdot 3:2 \times 16 = 6 \times 16 = 96.$$

Вычислим эмпирическое значение критерия по формуле $S_{эм} = 2A - B = 2 \cdot 58 - 96 = 116 - 96 = 20$.

По соответствующим значениям $c = 4$ и $n = 4$ находим $S_{кр}$ в таблице критических значений:

$$S_{кр} = \begin{cases} 38, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 50, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $S_{эм} < S_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 принимается: тенденция увеличения ошибок при переходе от выборки к выборке (слева направо) является случайной.

4. Алгоритм принятия решений о выборе критерия для сопоставления

При принятии решения о выборе критерия для сопоставления выборок по уровню исследуемого признака вначале определяют, соответствует ли распределение признака нормальному распределению. Если это так, то применяют t -критерий Стьюдента для независимых выборок. Если же распределение признака отлично от нормального, то дальнейший выбор критерия осуществляют с помощью алгоритма, предложенного Е.В. Сидоренко [27, с. 71].

АЛГОРИТМ

выбора критерия оценки достоверности различий
между независимыми выборками по уровню признака



Одну и ту же задачу на сопоставление можно решить с помощью разных критериев. При этом могут встретиться такие случаи, когда сделать однозначный вывод не представляется возможным: одни критерии дают достоверные, другие – недостоверные различия. В этих случаях приоритет отдается параметрическим критериям (при условии достаточности объема выборок и нормального распределения исследуемых величин) [14].

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие типы задач может решать психолог в процессе исследования?
2. Приведите примеры задач на выявление различий в уровне исследуемого признака.
3. Приведите примеры задач на оценку сдвига значений исследуемого признака.
4. Приведите примеры задач на выявление различий в распределении признака.
5. Приведите примеры задач на выявление степени согласованности изменений двух признаков (двух иерархий).
6. Приведите примеры задач на выявление изменений признака под влиянием контролируемых условий.
7. В каких случаях психолог решает задачу выявления различий в уровне исследуемого признака?
8. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления Q-критерия Розенбаума.

9. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления *U*-критерия Манна-Уитни.

10. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления *t*-критерия Стьюдента для независимых выборок.

11. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления *F*-критерия Фишера.

12. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления *H*-критерия Крускала-Уоллиса.

13. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления *S*-критерия тенденций Джонкира.

14. В каком случае *S*-критерий тенденций Джонкира может быть использован для установления меры связи между признаками?

15. Охарактеризуйте алгоритм выбора критерия оценки достоверности различий по уровню исследуемого признака между независимыми выборками.

Тема 11 Оценка достоверности сдвига в значениях исследуемого признака

План:

1. Обоснование задачи исследования изменений.
2. Классификация сдвигов и критериев оценки их статистической достоверности.
3. Методы выявления достоверности сдвига в значениях исследуемого признака:
 - 3.1. *G*-критерий знаков;
 - 3.2. *T*-критерий Вилкоксона;
 - 3.3. *t*-критерий Стьюдента для зависимых выборок;
 - 3.4. χ^2_r -критерий Фридмана;
 - 3.5. *L*-критерий тенденций Пейджа.
4. Алгоритм принятия решения о выборе критерия для оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака.

Основные понятия и термины: сдвиг, типичные сдвиги, нетипичные сдвиги, нулевые сдвиги, уравновешенные выборки, *G*-критерий знаков, *T*-критерий Вилкоксона, *t*-критерий Стьюдента для зависимых выборок, χ^2_r -критерий Фридмана, *L*-критерий тенденций Пейджа.

1. Обоснование задачи исследования изменений

В психологических исследованиях часто нужно доказать, что в результате действия каких-либо факторов произошли достоверные изменения (сдвиги) в измеряемом показателе. Сдвиг – это разность между вторым и первым замерами изучаемой переменной. В зависимости от того, под влиянием какого фактора происходит изменение, выделяют следующие виды сдвигов [27]:

1. Временной сдвиг – сопоставление показателей, полученных по одним и тем же методикам у одних и тех же испытуемых (например, сопоставление уровня тревожности у первокурсников до проведения психологического тренинга и после него).

2. Ситуационный сдвиг – сопоставление показателей, полученных по одним и тем же методикам, но в разных условиях измерения (например, сравнение времени, затраченного испытуемыми на решение задачи в обычных условиях и в условиях шума).

3. Умозрительный сдвиг – сопоставление показателей, измеренных в обычных и воображаемых условиях (например, студентов просят представить, что им сейчас предстоит сдавать экзамен, и измеряют уровень ситуативной тревожности, который затем сравнивают с аналогичным показателем, измеренным в обычной учебной ситуации).

4. Сдвиг под влиянием контролируемых или неконтролируемых условий – сопоставление замеров, произведенных в экспериментальной группе до и после экспериментального воздействия, а затем сравнение их с аналогичными замерами в контрольной группе, на которую воздействие не оказывалось (примером таких сдвигов является сопоставление замеров 1 и 3, а также замеров 2 и 4, которые представлены в таблице 11.1, и последующее их сравнение [13, с. 46]).

Таблица 11.1

Схема психологического исследования

<i>Экспериментальная группа</i>	<i>Контрольная группа</i>
1. Начальный срез	2. Начальный срез
Экспериментальное воздействие есть	Экспериментального воздействия нет
3. Конечный срез	4. Конечный срез

Если статистически достоверный сдвиг есть только в экспериментальной группе, то можно утверждать, что воздействие было эффективным. Если же статистически достоверно диагностирован сдвиг в обеих выборках, но в контрольной он меньше, то необходимо сравнить сдвиги между собой с помощью методов, позволяющих сопоставить выборки по уровню признака (т.е. сравнить замеры 3 и 4). В случае, если сдвиг в экспериментальной группе статистически достоверно больше сдвига в контрольной, можно говорить об эффективности экспериментального воздействия. Если контрольной группы в эксперименте нет, то можно констатировать, что сдвиг произошел, но нельзя утверждать, что он вызван экспериментальным воздействием.

Иногда исследователь не располагает контрольной группой, но имеет две экспериментальные группы, различающиеся по способам воздействия на них (например, одна группа испытуемых решает задачу в условиях ограничения времени, другая – без такого ограничения), или две группы, находящиеся в разнообразных естественных условиях обучения, работы, проживания (например, городские и сельские школьники). Сопоставление групп, различающихся по этим признакам, позволяет установить специфику экспериментальных или есте-

ственно действующих факторов. Однако нужно помнить, что воздействие неучтенных факторов может быть более сильным.

5. Структурный сдвиг – сопоставление между собой разных показателей одних и тех же испытуемых, если они измерены в одних и тех же единицах по одной и той же шкале (например, показатели вербального и невербального интеллекта, измеренного по шкале Векслера).

При измерении сдвига оба замера не обязательно делать на одной и той же выборке. Для этого можно использовать *уравновешенные выборки*, т.е. выборки, сходные по полу, возрасту, профессии и другим характеристикам, значимым для эксперимента. Например, время решения задачи в условиях шума измеряют на одной подгруппе первокурсников, а в обычных условиях – на другой, при этом обе подгруппы отобраны из одной группы методом случайного отбора. Однако на практике даже в уравновешенных выборках возможны различия, которые могут существенно повлиять на результаты при исследовании сдвигов. В итоге может оказаться, что экспериментатор изучал не влияние независимой переменной, а различия по этому показателю у двух выборок (т.е. решал задачу первого типа).

Другой вариант уравновешивания – введение параллельных форм теста в тех случаях, когда на результате повторного замера может сказаться эффект научения. Тогда замер до воздействия производят с помощью одной методики, а после воздействия – с помощью другой, измеряющей ту же переменную. В этом случае нужно помнить, что на результате измерений могут сказаться и действие фактора времени, и различия в параллельных формах теста, и другие неучтенные факторы.

2. Классификация сдвигов и критериев оценки их статистической достоверности

Для того чтобы определить критерий для оценки статистической достоверности сдвигов различных видов, обратимся к таблице, предложенной Е.В. Сидоренко [27, с. 76]:

Таблица 11.2

Классификация сдвигов и критериев оценки их статистической достоверности

Виды сдвигов	Объект сопоставлений	Условия		Критерии оценки достоверности сдвига
		Количество замеров	Количество групп	
1. Временные, ситуационные, умозрительные, измерительные	Одни и те же показатели, измеренные у одних и тех же испытуемых в разное время, в разных ситуациях, в разных представляемых условиях или разными способами	2	1	G-критерий знаков, T-критерий Вилкоксона
		3 и более	t	L-критерий тенденций Пейджа; χ_r^2 -критерий Фридмана

Виды сдвигов	Объект сопоставлений	Условия		Критерии оценки достоверности сдвига
		Количество замеров	Количество групп	
2. Сдвиги под влиянием экспериментальных воздействий	Одни и те же показатели, измеренные у одних и тех же испытуемых до и после воздействия: а) при отсутствии контрольной группы	2	1	G -критерий знаков, T -критерий Вилкоксона
		3 и более	1	L -критерий тенденций Пейджа; χ_r^2 -критерий Фридмана
	б) при наличии контрольной группы	2	2	Вариант 1 – сопоставление значений «до» и «после» отдельно по экспериментальной и контрольной группам: G -критерий знаков; T -критерий Вилкоксона Вариант 2 – сопоставление сдвигов в двух группах: Q -критерий; U -критерий Манна-Уитни; ϕ^* -критерий Фишера
		3 и более	2	Сопоставление значений отдельно по экспериментальной и контрольной группам: L -критерий тенденций Пейджа; χ_r^2 -критерий Фридмана
	3. Структурные сдвиги	2	1	G -критерий знаков, T -критерий Вилкоксона
		3 и более	1	L -критерий тенденций Пейджа; χ_r^2 -критерий Фридмана

Как следует из таблицы 10.2, выбор критерия определяется не только видом сдвига, но и количеством замеров, произведенных на выборке.

3. Методы выявления достоверности сдвига в значениях исследуемого признака

Для выявления достоверности сдвига в значениях исследуемого признака используется ряд статистических критериев.

3.1. G -критерий знаков [27]

Назначение. Используется для установления общего направления сдвига исследуемого признака: т.е. показывает, в какую сторону изменяются значения признака при переходе от первого измерения ко второму (в сторону повышения (улучшения) или понижения (ухудшения)).

Описание. Критерий применим к признакам, измеренным как количественно, так и качественно. Если количественные сдвиги варьируют в широком диа-

пазоне, лучше использовать критерий Вилкоксона, который определяет не только направление, но и интенсивность сдвигов.

При использовании критерия анализируют три вида сдвигов: типичные, нетипичные, нулевые. *Типичными* называются сдвиги, которые преобладают в исследовании. Сдвиги, противоположные типичным, называются *нетипичными*. *Нулевыми* называются сдвиги, если реакция испытуемого не изменяется (не повышается и не понижается). Нулевые сдвиги из рассмотрения исключаются. При этом объем выборки n уменьшается на число нулевых сдвигов.

G-критерий позволяет определить, не слишком ли много наблюдается нетипичных сдвигов, чтобы сдвиг в типичном направлении считать преобладающим. Критерий можно представить графически в форме облаков, где темное облако – отрицательные сдвиги, светлое облако – положительные сдвиги [27, с. 79]:

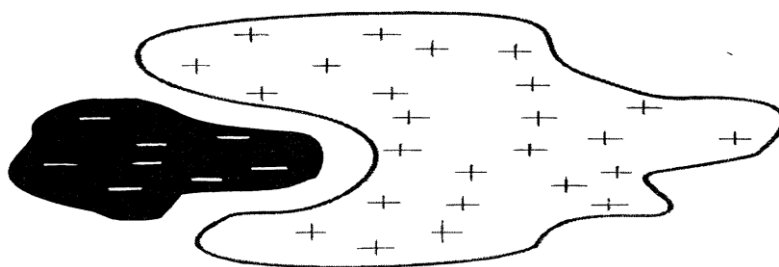


Рис. 11.1 Графическое представление G-критерия знаков в виде темного и светлого облаков

Количество нетипичных сдвигов – это и есть $G_{эмп}$. Чем оно меньше, тем более вероятно, что сдвиг в типичном направлении статистически достоверен.

Ограничения:

1) $5 \leq n \leq 300$.

Гипотезы:

H_0 : преобладание типичного сдвига является случайным.

H_1 : преобладание типичного сдвига не является случайным.

Алгоритм:

1. Вычислить разность в каждой паре значений («после» – «до»).

2. Подсчитать количество нулевых сдвигов и исключить их из рассмотрения.

3. Определить преобладающее направление изменений, подсчитав количество типичных сдвигов. Сформулировать статистические гипотезы.

4. Подсчитать количество нетипичных сдвигов. Это и есть эмпирическое значение критерия $G_{эмп}$.

5. Определить критическое значение критерия $G_{кр}$ для данного объема выборки (за вычетом нулевых сдвигов) (Приложение 14). Если $G_{эмп} \leq G_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 отвергается, сдвиг в типичную сторону достоверно преобладает. Если $G_{эмп} > G_{кр}$, то H_0 принимается.

G-критерий является *исключением* из общего правила принятия решения о достоверности различий: сдвиг в типичном направлении статистически достоверен, если $G_{эмп} \leq G_{кр}$.

В случае равенства числа типичных и нетипичных сдвигов G -критерий знаков неприменим [9].

Пример 1 [9]. Психолог проводит групповой тренинг с целью снижения уровня тревожности. С помощью теста Тейлора он дважды выявляет уровень тревожности у 14 участников до и после проведения тренинга. Пользуясь результатами исследования, представленными в таблице, выяснить, был ли проведенный тренинг эффективным.

Решение. Результаты эксперимента представим в виде таблицы, в которой произведем необходимые расчеты:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Уровень тревожности до тренинга	30	39	35	34	40	35	22	22	32	23	16	34	33	34
Уровень тревожности после тренинга	34	39	26	33	34	40	25	23	33	24	15	27	35	37
Сдвиг («после» – «до»)	+	0	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	+	+

Как видно из таблицы, число нулевых сдвигов $n_0 = 1$, число положительных сдвигов $n_+ = 8$, число отрицательных сдвигов $n_- = 5$. Следовательно, типичными будут положительные сдвиги.

Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : преобладание положительных сдвигов является случайным.

H_1 : преобладание положительных сдвигов не является случайным.

Нетипичными являются отрицательные сдвиги. Их число и есть эмпирическое значение G -критерия: $G_{эм} = 5$.

По таблице Приложения 14 находим критические значения G -критерия для объема выборки, уменьшенного на число нулевых сдвигов: $n - 1 = 14 - 1 = 13$.

$$G_{кр} = \begin{cases} 3, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 1, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $G_{эм} > G_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 принимается, преобладание положительных сдвигов является случайным, т.е. тренинг не привел к существенным изменениям в уровне тревожности испытуемых.

3.2. T -критерий Вилкоксона [27]

Назначение. Применяется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке. Позволяет установить не только направленность, но и выраженность изменений, т.е. интенсивность сдвига в определенном направлении.

Описание. Критерий является более мощным, чем критерий знаков. Он основан на ранжировании абсолютных величин сдвигов и сопоставлении сумм рангов положительных и отрицательных сдвигов. Если сдвиги в положительном или отрицательном направлении происходят случайно, то эти суммы рангов примерно равны. Как и в критерии знаков, из рассмотрения исключаются нулевые сдвиги, а объем выборки уменьшается на их число.

Критерий можно представить графически в форме темных и светлых «фронтов» [27, с. 89]:

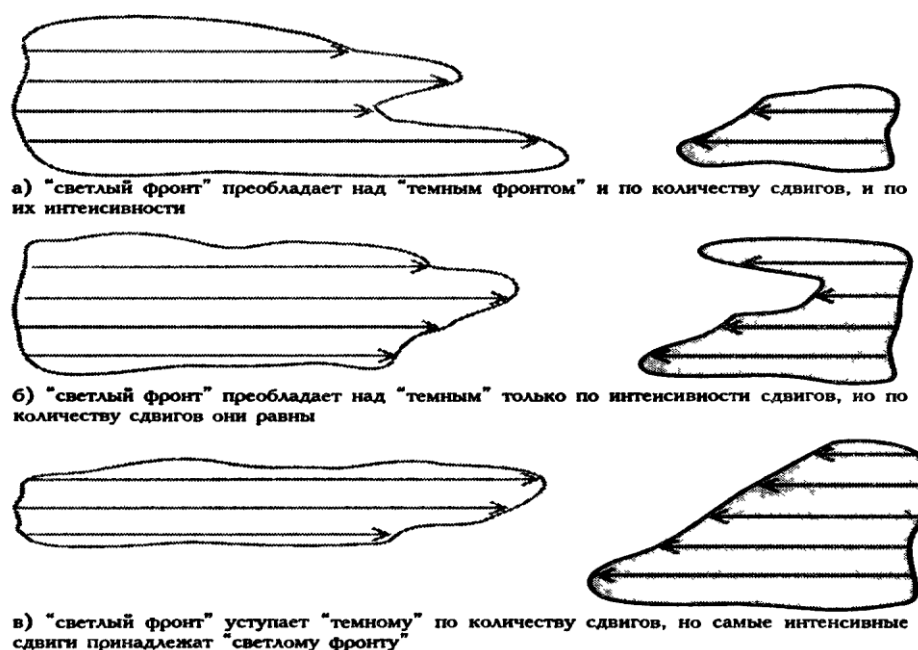


Рис. 11.2 Графическое представление T -критерия Вилкоксона в виде соотношения темных и светлых «фронтов»

Ограничения:

1) данные представлены в ранговой шкале или в количественных шкалах и варьируют в достаточно широком диапазоне (в противном случае используют критерий знаков);

2) $5 \leq n \leq 50$.

Гипотезы:

H_0 : интенсивность сдвигов в типичном направлении не превосходит интенсивности сдвигов в нетипичном направлении.

H_1 : интенсивность сдвигов в типичном направлении превосходит интенсивность сдвигов в нетипичном направлении.

Алгоритм:

1. Вычислить разность между значениями в паре («после» – «до»).
2. Подсчитать количество нулевых сдвигов и исключить их из рассмотрения.
3. Определить преобладающее направление изменений, подсчитав количество типичных сдвигов. Сформулировать статистические гипотезы.
4. Записать абсолютные величины разностей.
5. Проранжировать абсолютные величины разностей по принципу «меньшему значению – меньший ранг». Проверить правильность вычисления рангов.
6. Подсчитать сумму рангов нетипичных сдвигов. Это и есть эмпирическое значение критерия $T_{эмп}$.
7. Определить критическое значение критерия $T_{кр}$ для данного объема выборки (за вычетом нулевых сдвигов) (Приложение 15). Если $T_{эмп} \leq T_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 отвергается, интенсивность сдвига в типичную сторону достоверно больше. Если $T_{эмп} > T_{кр}$, то H_0 принимается.

T -критерий Вилкоксона также является *исключением* из общего правила принятия-отвержения нулевой гипотезы: сдвиг в типичном направлении статистически достоверен, если $T_{эмп} \leq T_{кр}$.

Пример 2 [13]. В кабине самолета изменили эргономическую среду, что привело к изменению времени выполнения определенной задачи пилотом. В исследовании были сделаны замеры в двух разных условиях у 10 летчиков. Выяснить, привело ли изменение эргономической среды к изменению времени решения задачи пилотами.

Решение. Результаты эксперимента представим в виде таблицы и произведем в ней расчеты в соответствии с алгоритмом T -критерия Вилкоксона:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Начальные показатели времени решения задачи	52	55	47	62	58	58	44	57	61	63
Конечные показатели времени решения задачи	51	60	41	68	58	55	40	49	52	68
Разность («после» – «до»)	-1	+5	-6	+6	0	-3	-4	-8	-9	+5
Абсолютное значение разности	1	5	6	6	0	3	4	8	9	5
Ранг разности	1	4,5	6,5	6,5	–	2	3	8	9	4,5

Определим преобладающее направление сдвигов, проанализировав табличные данные: число нулевых сдвигов $n_0 = 1$, число положительных сдвигов $n_+ = 3$, число отрицательных сдвигов $n_- = 6$. Следовательно, типичными будут отрицательные сдвиги.

Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : интенсивность отрицательных сдвигов не превосходит интенсивности положительных сдвигов.

H_1 : интенсивность отрицательных сдвигов превосходит интенсивность положительных сдвигов.

Проведем ранжирование абсолютных значений разности, не учитывая нулевой сдвиг. Проверим правильность ранжирования:

$$\sum_{i=1}^n R_i = 1 + 4,5 \times 2 + 6,5 \times 2 + 2 + 3 + 8 + 9 = 1 + 9 + 13 + 2 + 3 + 8 + 9 = 45.$$

По формуле для вычисления суммы рангов для $n = 9$ получаем

$$\sum_{i=1}^n R_i = n \times (n + 1) : 2 = 9 \times (9 + 1) : 2 = 45.$$

Поскольку нетипичными являются положительные сдвиги, выделим их ранги жирным шрифтом и подсчитаем сумму рангов. Это и есть эмпирическое значение T -критерия:

$$T_{эмп} = 4,5 + 6,5 + 4,5 = 15,5.$$

По таблице Приложения 15 находим критические значения T -критерия для объема выборки, уменьшенного на число нулевых сдвигов: $n - 1 = 10 - 1 = 9$:

$$T_{кр} = \begin{cases} 8, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 3, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $T_{эмп} > T_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 принимается, преобладание отрицательных сдвигов является случайным, т.е. изменение эргономической среды не привело к изменению времени решения задачи пилотами.

Рассчитать G -критерий знаков и T -критерий Вилкоксона можно также с помощью универсальных статистических пакетов [10, с. 101–106].

3.3. t -критерий Стьюдента для зависимых выборок [12; 13]

Назначение. Используется для оценки достоверности сдвига в зависимых выборках.

Описание. Это параметрический критерий, который является более мощным, чем критерий Вилкоксона и дает достоверные результаты, даже если выборки малы. Он основывается на вычислении разности между значениями в парах данных.

Ограничения:

- 1) данные измерены в количественных шкалах;
- 2) распределение признака в обеих выборках соответствует закону нормального распределения.

Гипотезы.

H_0 : сдвиг между показателями начального и конечного срезов недостоверен.

H_1 : сдвиг между показателями начального и конечного срезов достоверен.

Алгоритм:

1. Вычислить разность между значениями в каждой паре («после» – «до»), обозначив полученную величину d_i .
2. Вычислить сумму полученных разностей Σd_i .
3. Возвести все разности в квадрат и вычислить Σd_i^2 – сумму квадратов разностей.
4. Вычислить эмпирическое значение t -критерия по формуле

$$t_{\text{эм}} = \frac{\Sigma d_i}{\sqrt{\frac{n \Sigma d_i^2 - (\Sigma d_i)^2}{n-1}}}, \quad \text{где } n - \text{объем выборки.}$$

5. Найти число степеней свободы по формуле $\nu = n - 1$.

6. По таблице Приложения 7 определить критические значения критерия $t_{кр}$ для соответствующего числа степеней свободы ν . Если $|t_{\text{эм}}| \geq t_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 отвергается. Если $|t_{\text{эм}}| < t_{кр}$, то H_0 принимается.

Пример 3 [13]. В начале учебного года у группы первокурсников был измерен уровень интеллекта. Через год при помощи параллельной методики у этих же студентов снова измерили уровень интеллекта. Можно ли утверждать, что за год обучения интеллектуальный уровень студентов значительно изменился?

Решение. Представим результаты исследования в виде таблицы и произведем в ней необходимые расчеты в соответствии с алгоритмом t -критерия Стьюдента:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Начальный срез	100	102	105	120	110	106	109	115	115	114	111	125
Конечный срез	116	102	114	122	119	116	100	121	118	124	119	121
d_i	16	0	9	2	9	10	-9	6	3	10	8	-4
d_i^2	256	0	81	4	81	100	81	36	9	100	64	16

Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : сдвиг между показателями начального и конечного срезов недостоверен.

H_1 : сдвиг между показателями начального и конечного срезов достоверен.

Вычислим сумму разностей значений в парах: $\Sigma d_i = 16 + 0 + 9 + 2 + 9 + 10 + (-9) + 6 + 3 + 10 + 8 + (-4) = 60$.

Вычислим сумму квадратов разностей: $\Sigma d_i^2 = 256 + 0 + 81 + 4 + 81 + 100 + 81 + 36 + 9 + 100 + 64 + 16 = 828$.

Вычислим $t_{эмп} = \Sigma d_i / \sqrt{[(n \cdot \Sigma d_i^2 - (\Sigma d_i)^2) / (n - 1)]} = 60 / \sqrt{[(12 \cdot 828 - (60)^2) / (12 - 1)]} = 60 / \sqrt{[(9936 - 3600) / 11]} = 60 / \sqrt{[6336 / 11]} = 60 / \sqrt{576} = 60 / 24 = 2,5$.

Определим число степеней свободы: $\nu = n - 1 = 12 - 1 = 11$. По таблице Приложения 7 находим критические значения t -критерия для числа степеней свободы $\nu = 11$:

$$t_{кр} = \begin{cases} 2,20, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 3,11, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $|t_{эмп}| > t_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 отклоняется и принимается H_1 : сдвиг между показателями начального и конечного срезов достоверен, т.е. за год обучения интеллектуальный уровень студентов значимо изменился.

Расчет t -критерия Стьюдента для зависимых выборок удобно производить с помощью статистических пакетов [10, с. 144–146].

3.4 χ_r^2 -критерий Фридмана [27]

Назначение. Используется для сопоставления показателей, измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке. Указывает, что величины показателей изменяются, но не указывает, в каком направлении.

Описание. Критерий является распространением критерия Вилкоксона на большее чем два количество условий. При этом ранжируются не модули сдвигов, а сами индивидуальные значения, полученные испытуемым в замерах. Если различия между значениями признака, полученными в разных условиях, случайны, то суммы рангов, полученные по разным условиям, будут примерно равны. Эмпирическое значение χ_r^2 -критерия указывает, насколько различаются суммы рангов. Чем $\chi_{r эмп}^2$ больше, тем более существенные различия ранговых сумм оно отражает.

Ограничения:

1) сравниваются не менее двух испытуемых, каждый из которых прошел не менее трех замеров: $n \geq 2, c \geq 3$;

2) если $c = 3$ и $2 \leq n \leq 9$, то для определения уровня статистической значимости используют таблицу Приложения 16.1;

если $c = 4$ и $2 \leq n \leq 4$, то для определения уровня статистической значимости используют таблицу Приложения 16.2;

если $c > 4$ и $n > 9$, то для определения уровня статистической значимости используют таблицу для χ^2 -критерия Пирсона (Приложение 18), вычисляя число степеней свободы по формуле $\nu = c - 1$, где c – количество замеров.

Гипотезы:

H_0 : различия между показателями, полученными в разных условиях, случайны.

H_1 : различия между показателями, полученными в разных условиях, неслучайны.

Алгоритм:

1. Проранжировать индивидуальные значения каждого испытуемого, полученные им в первом, втором, третьем и т.д. замерах.

2. Просуммировать ранги значений по каждому условию. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной суммой по формуле

$$\sum R_i = n \cdot \frac{c(c+1)}{2}.$$

3. Определить эмпирическое значение критерия по формуле

$$\chi_{r\text{эм}}^2 = \frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \sum (T_i)^2 - 3n \cdot (c+1),$$

где n – количество испытуемых, c – количество условий, T_i – суммы рангов по каждому условию.

4. Определить $\chi_{r\text{кр}}^2$ по таблице в соответствии с ограничениями, определенными в пункте 2 (Приложение 16.1 или Приложение 16.2).

5. Если $\chi_{r\text{эм}}^2 \geq \chi_{r\text{кр}}^2$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 отвергается, т.е. между показателями, полученными в разных условиях, существуют неслучайные различия. Если $\chi_{r\text{эм}}^2 < \chi_{r\text{кр}}^2$, то H_0 принимается.

Пример 4 [9]. Шести школьникам предъявляют тест Равена. Фиксируется время решения каждого задания. Выяснить, существуют ли значимые различия между временем решения первых трех заданий теста. Результаты измерений представлены в таблице:

№ п.п.	Время решения первого задания (в с)	Время решения второго задания (в с)	Время решения третьего задания (в с)
1	8	3	5
2	4	15	12
3	6	23	15
4	3	6	6
5	7	12	3
6	15	24	12

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : различия между временем решения трех заданий испытуемыми случайны.

H_1 : различия между временем решения трех заданий испытуемыми неслучайны.

Проранжируем индивидуальные значения каждого испытуемого по трем условиям. Для этого преобразуем таблицу данных, добавив в нее дополнительные столбцы для значений рангов:

№ п.п.	Время решения 1-го задания (в сек)	Ранги времени решения 1-го задания	Время решения 2-го задания (в сек)	Ранги времени решения 2-го задания	Время решения 3-го задания (в сек)	Ранги времени решения 2-го задания
1	8	3	3	1	5	2
2	4	1	15	3	12	2
3	6	1	23	3	15	2
4	3	1	6	2,5	6	2,5
5	7	2	12	3	3	1
6	15	2	24	3	12	1
Сумма рангов		10		15,5		10,5

Вычислим общую сумму рангов: $10 + 15,5 + 10,5 = 36$.

Проверим совпадение общей суммы рангов с расчетной суммой:

$$R_i = nc \cdot (c + 1) / 2 = 6 \cdot 3 \cdot (3 + 1) / 2 = 18 \cdot 4 / 2 = 36.$$

Определим эмпирическое значение критерия по формуле

$$\chi^2_{r\text{ эм}} = [12 / n \cdot c \cdot (c + 1)] \cdot \Sigma(T_i)^2 - 3n \cdot (c + 1) = [12 / 6 \cdot 3 \cdot (3 + 1)] (10^2 + 15,5^2 + 10,5^2) - 3 \cdot 6 \cdot (3 + 1) = [12 / 6 \cdot 3 \cdot 4] \times 450,5 - 18 \cdot 4 = 1 / 6 \cdot 450,5 - 72 = 75,08 - 72 = 3,08.$$

Поскольку $c = 3$, воспользуемся таблицей Приложения 16.1. Таблицы для поиска критических значений критерия Фридмана отличаются от стандартных статистических таблиц. В них представлены уровни статистической значимости p , соответствующие определенным значениям χ^2_r . Ближайшим к полученному нами значению $\chi^2_{r\text{ эм}} = 3,08$ является значение $\chi^2_r = 3,00$. Ему соответствует точный уровень значимости $p = 0,252$, который превышает допустимый уровень значимости $p = 0,05$. Тогда $\chi^2_{r\text{ эм}} < \chi^2_{кр}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 принимается, различия между временем решения испытуемыми трех заданий теста Равена случайны.

Рассчитать χ^2_r -критерий Фридмана можно с помощью статистических пакетов [10, с. 114–117].

3.5. L -критерий тенденций Пейджа [27]

Назначение. Применяется для сопоставления показателей, измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке. Позволяет выявить направление изменений (тенденции в изменении величин), а не только констатирует различия.

Описание. Является распространением критерия Фридмана на количество условий, большее двух. Позволяет проверить предположения об определенной возрастной или ситуативно обусловленной динамике признаков. Критерий может быть использован в лонгитюдных исследованиях для небольшой выборки ($n \leq 12$) и числа замеров $c \leq 6$. Если эти условия не выполняются, применяют χ^2_r -критерий Фридмана.

В L -критерии используется ранжирование индивидуальных значений по каждому испытуемому. Эмпирическое значение критерия отражает степень различия между ранговыми суммами по каждому условию, поэтому чем больше значение $L_{\text{эм}}$, тем более существенны различия.

Ограничения:

1) сравнивается не менее двух и не более двенадцати испытуемых, каждый из которых прошел от трех до шести замеров в разных условиях: $2 \leq n \leq 12$, $3 \leq c \leq 6$;

2) столбцы данных должны быть упорядочены по возрастанию ранговых сумм: слева размещают столбец с наименьшей суммой рангов, справа – с наибольшей.

Гипотезы:

H_0 : увеличение индивидуальных показателей при переходе от первого условия ко второму, затем к третьему и далее случайно.

H_1 : увеличение индивидуальных показателей при переходе от первого условия ко второму, затем к третьему и далее неслучайно.

Алгоритм:

1. Проранжировать индивидуальные значения каждого испытуемого, полученные им в первом, втором, третьем и т.д. замерах.

2. Просуммировать ранги значений по каждому условию. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной суммой по формуле $\sum R_i = n \cdot \frac{c(c+1)}{2}$.

3. Расположить все условия в порядке возрастания ранговых сумм в таблице.

4. Определить эмпирическое значение критерия по формуле

$$L_{\text{эм}} = \sum (T_j \cdot j),$$

где T_j – сумма рангов по каждому условию, j – порядковый номер, приписанный каждому условию в упорядоченной последовательности условий.

4. Определить $L_{\text{кр}}$ по таблице Приложения 17 для данного количества испытуемых n и количества условий c .

5. Если $L_{\text{эм}} \geq L_{\text{кр}}$ при уровне значимости $p = 0,05$, то H_0 отвергается, т.е. увеличение показателей при переходе от условия к условию неслучайно. Если $L_{\text{эм}} < L_{\text{кр}}$, то H_0 принимается.

Пример 5 [9]. Используя данные предыдущей задачи, установить, является ли случайным увеличение индивидуальных показателей времени решения трех задач теста Равена при переходе от условия к условию.

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : увеличение времени решения задания при переходе от первого условия ко второму, затем к третьему случайно.

H_1 : увеличение времени решения задания при переходе от первого условия ко второму, затем к третьему не является случайным.

Два пункта алгоритма L -критерия Пейджа аналогичны операциям критерия Фридмана. В результате их выполнения получается таблица с вычисленной суммой рангов по каждому условию. Преобразуем таблицу так, чтобы в начале таблицы стоял столбец с наименьшей суммой рангов, а в конце – с наибольшей:

№ п.п.	Время решения 1-го задания (в с)	Ранги времени решения 1-го задания	Время решения 3-го задания (в с)	Ранги времени решения 3-го задания	Время решения 2-го задания (в с)	Ранги времени решения 2-го задания
1	8	3	5	2	3	1
2	4	1	12	2	15	3
3	6	1	15	2	23	3
4	3	1	6	2,5	6	2,5
5	7	2	3	1	12	3
6	15	2	12	1	24	3
Сумма рангов		10		10,5		15,5

Определим эмпирическое значение критерия по формуле

$$L_{\text{эм}} = \sum (T_j \cdot j) = 10 \cdot 1 + 10,5 \cdot 2 + 15,5 \cdot 3 = 10 + 21 + 46,5 = 77,5.$$

Определим критическое значение L -критерия для $n = 6$ и $c = 3$, воспользовавшись таблицей Приложения 17, в которой представлены три уровня статистической значимости:

$$L_{\text{кр}} = \begin{cases} 79, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 81, & \text{при } p \leq 0,01; \\ 83, & \text{при } p \leq 0,001. \end{cases}$$

Тогда $L_{\text{эм}} < L_{\text{кр}}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 принимается, увеличение времени решения заданий теста Равена при переходе от первого условия ко второму,

затем к третьему случайно.

Рассчитать L -критерий Пейджа можно с помощью статистических пакетов [10, с. 114–115].

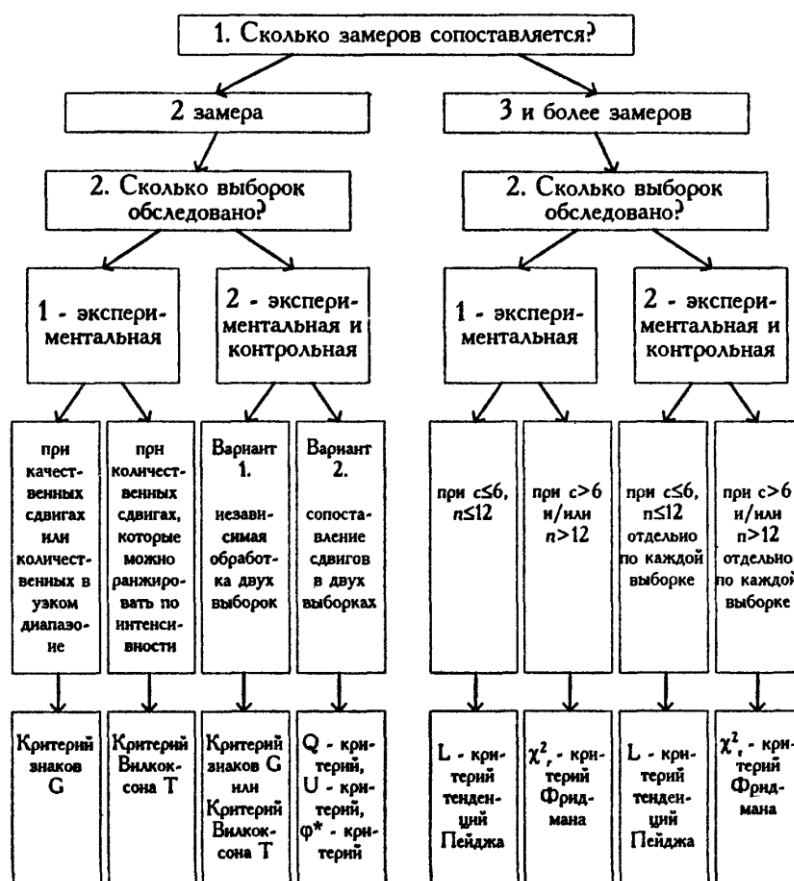
Примечание. Сравнивая статистические гипотезы критериев Фридмана и Пейджа, можно подумать, что отсутствие достоверных различий между показателями, полученными в разных условиях (гипотеза H_0 критерия Фридмана), автоматически означает и отсутствие тенденции увеличения индивидуальных показателей при переходе от условия к условию (гипотеза H_0 критерия Пейджа). Однако это не совсем так. Указанные критерии характеризуют разные аспекты анализируемых статистических данных. Если критерий Фридмана выявляет наличие различий в измеренных показателях, то критерий Пейджа позволяет выявить тенденцию в изменениях величин измеряемых признаков. Поэтому принятие H_0 для статистических данных в критерии Фридмана может соответствовать принятию H_1 для тех же показателей в критерии Пейджа [9].

4. Алгоритм принятия решения о выборе критерия для оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака

Принимая решение о выборе критерия для оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака, вначале определяют, соответствует ли распределение признака в обоих замерах нормальному распределению. Если это так, то применяют t -критерий Стьюдента для зависимых выборок. Если же распределение признака отлично от нормального, то дальнейший выбор критерия осуществляют с помощью алгоритма, предложенного Е.В. Сидоренко [27, с. 109]:

АЛГОРИТМ

выбора критерия для оценки достоверности сдвига



Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое сдвиг?
2. Представьте классификацию сдвигов и охарактеризуйте их.
3. Приведите примеры задач на оценку временного сдвига значений исследуемого признака.
4. Приведите примеры задач на оценку ситуационного сдвига значений исследуемого признака.
5. Приведите примеры задач на оценку умозрительного сдвига значений исследуемого признака.
6. Приведите примеры задач на оценку структурного сдвига значений исследуемого признака.
7. Приведите примеры задач на оценку сдвига значений исследуемого признака под влиянием контролируемых условий.
8. Как оценивается эффективность экспериментального воздействия при наличии контрольной группы; в отсутствие контрольной группы?
9. Охарактеризуйте исследования, в которых участвуют две экспериментальные группы.
10. Какие сдвиги называют типичными; нетипичными; нулевыми?
11. Представьте классификацию критериев оценки статистической достоверности сдвигов.
12. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления G-критерия знаков.

13. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления T -критерия Вилкоксона.

14. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления t -критерия Стьюдента для зависимых выборок.

15. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления χ^2 -критерия Фридмана.

16. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления L -критерия тенденций Пейджа.

17. Охарактеризуйте алгоритм выбора критерия для оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака.

Тема 12 Выявление различий в распределении признака

План:

1. Обоснование задачи сравнения распределений признака.
2. Методы выявления различий в распределениях признака:
 - 2.1. χ^2 -критерий Пирсона;
 - 2.2. λ -критерий Колмогорова-Смирнова.
3. Алгоритм выбора критерия для сравнения распределений признака.

Основные понятия и термины: эмпирическое распределение, теоретическое распределение, χ^2 -критерий Пирсона, λ -критерий Колмогорова-Смирнова.

1. Обоснование задачи сравнения распределений признака [27]

Все распределения признака делятся на две большие группы: *эмпирические* – полученные в результате исследования и *теоретические* – полученные в результате теоретического анализа (например, нормальное или равномерное распределения). Анализируя различия в распределениях признаков, мы можем встретиться со следующими ситуациями:

1. Сопоставление эмпирического распределения с теоретическим. Эта ситуация возникает, во-первых, когда нам надо установить, подчиняется ли полученное в исследовании распределение закону нормального распределения, например, для выбора статистического критерия (параметрического или непараметрического); во-вторых, для определения того, соответствует ли эмпирическое распределение равномерному, например при исследовании вопроса о предпочтении определенного вида задач, товаров.

2. Сравнение двух теоретических распределений, которые могут различаться по средним значениям, по дисперсиям, по асимметрии, по эксцессу либо по сочетаниям перечисленных параметров. Это позволяет подтвердить или опровергнуть гипотезу научного исследования.

Например, В.А. Геодакяном было выдвинуто предположение о том, что фенотипическая дисперсия мужского пола должна быть больше, чем женского. Для

ее проверки было проведено исследование, результаты которого графически представлены на рисунке [27, с. 110]:

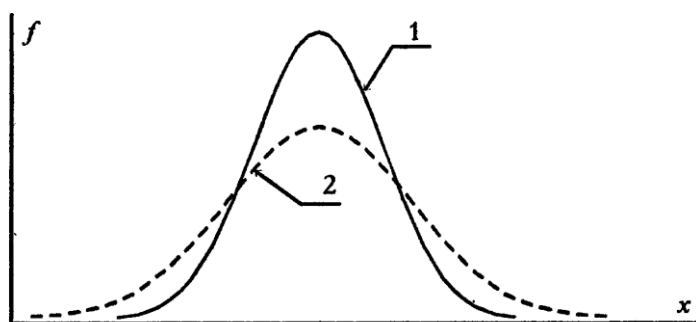


Рис. 12.1. Графическое представление распределения фенотипических признаков у представителей разных полов

1 – распределение фенотипических признаков у женщин, 2 – распределение фенотипических признаков у мужчин, x – значения признака, f – относительная частота встречаемости признака

Анализ графиков распределений позволяет предположить, что теоретическая гипотеза верна. Однако ее необходимо подтвердить с помощью статистического критерия для сравнения двух эмпирических распределений.

Если мы докажем, что распределения статистически достоверно различаются, это может стать основой для построения классификации задач и типологий испытуемых. Например, популяцию можно разделить на две группы по половому признаку в зависимости от дисперсии индивидуальных психологических характеристик: у женщин чаще встречаются средние значения фенотипических признаков, а у мужчин преобладают их крайние значения. Эти различия, по мнению В.А. Геодакяна, обусловлены тем, что мужская часть популяции ответственна за поиск новых форм приспособления (включающий как возможные пути эволюции, так и ошибки), в то время как женская часть популяции несет ответственность за сохранение накопленных изменений. Таким образом, сопоставление распределений может дать начало научному поиску.

2. Методы выявления различий в распределениях признака

В математической статистике для определения расхождения или согласия распределений используются χ^2 -критерий Пирсона, λ -критерий Колмогорова-Смирнова. Эти методы требуют тщательной группировки данных, трудоемких вычислений и дают точные результаты на больших выборках. Однако их нельзя заменить другими методами в двух случаях [27]:

1) в задачах, требующих доказательства неслучайности предпочтений при выборе из нескольких альтернатив;

2) в задачах, требующих обнаружения максимального расхождения между двумя распределениями для перегруппировки данных с целью последующего применения критерия φ^* – угловое преобразование Фишера.

2.1. χ^2 -критерий Пирсона [27]

Назначение. Применяется в двух случаях: 1) для сопоставления эмпирического распределения признака с теоретическим (равномерным, нормальным); 2) для сопоставления двух, трех и более эмпирических распределений одного и того же признака.

Описание. Позволяет ответить на вопрос, с одинаковой ли частотой встречаются разные значения признака в эмпирическом и теоретическом распределении или в двух и более эмпирических распределениях. Чем больше расхождение между двумя сопоставляемыми распределениями, тем больше эмпирическое значение χ^2 . При полном совпадении распределений $\chi_{эм}^2 = 0$.

Возможны следующие варианты сопоставления:

- вариант 1: эмпирическое распределение сравнивается с теоретическим распределением;

- вариант 2: эмпирическое распределение 1 сравнивается с эмпирическим распределением 2;

- вариант 3: эмпирическое распределение 1 сравнивается с эмпирическим распределением 2 и с эмпирическим распределением 3 и т.д.

Ограничения:

- 1) измерение может быть проведено в любой шкале;

- 2) выборки должны быть случайными и независимыми;

- 3) объем выборки должен быть достаточно большим ($n \geq 20 - [9]$, $n \geq 30 - [27]$), точность критерия повышается при больших n ;

- 4) теоретическая частота для каждого разряда должна быть не менее пяти: $f_m \geq 5$. Если число разрядов k задано заранее, то минимальное количество наблюдений определяется по формуле $n_{min} = k \cdot 5$;

- 5) выбранные разряды должны исчерпывать весь диапазон вариативности признаков;

- 6) разряды должны быть неперекрещивающимися, а сумма наблюдений по разрядам должна быть равна общему количеству наблюдений;

- 7) при сопоставлении распределений признаков, имеющих всего два разряда, необходимо вносить поправку на непрерывность. При этом величина $\chi_{эм}^2$ уменьшается.

В зависимости от задач, решаемых в исследовании, возможны следующие варианты *гипотез*:

Вариант 1:

H_0 : полученное эмпирическое распределение признака не отличается от теоретического.

H_1 : полученное эмпирическое распределение признака отличается от теоретического.

Вариант 2:

H_0 : эмпирическое распределение 1 не отличается от эмпирического распределения 2.

H_1 : эмпирическое распределение 1 отличается от эмпирического распределения 2.

Вариант 3:

H_0 : эмпирические распределения 1, 2, 3 и т.д. не различаются между собой.

H_1 : эмпирические распределения 1, 2, 3 и т.д. различаются между собой.

Алгоритм:

1. Занести в таблицу наименования разрядов (первый столбец) и соответствующие им эмпирические частоты $f_{\text{э}}$ (второй столбец).

2. Вычислить соответствующие теоретические частоты f_m , вписать их в третий столбец.

3. Вычислить разность между эмпирическими и теоретическими частотами по каждому разряду $f_{\text{э}} - f_m$, записать их в четвертый столбец.

4. Вычислить квадраты разностей частот по каждому разряду $(f_{\text{э}} - f_m)^2$, записав их в пятый столбец.

5. Разделить полученные квадраты разностей на теоретическую частоту $(f_{\text{э}} - f_m)^2 : f_m$ и записать результаты в шестой столбец.

6. Просуммировать частные, полученные в шестом столбце. Полученная сумма и есть эмпирическое значение критерия: $\chi_{\text{эм}}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f_{\text{э}i} - f_m)^2}{f_m}$.

7. Определить число степеней свободы:

а) при сравнении эмпирического распределения с теоретическим: $\nu = k - 1$, где k – число разрядов;

б) при сравнении двух (и более) эмпирических распределений: $\nu = (k - 1) \times (c - 1)$, где k – число строк, c – число столбцов в таблице кросс-табуляции.

Если $\nu = 1$, внести поправку на непрерывность, уменьшив абсолютную величину каждой разности частот на 0,5.

8. Определить $\chi_{\text{кр}}^2$ по таблице Приложения 18 для полученного числа степеней свободы.

9. Если $\chi_{\text{эм}}^2 \geq \chi_{\text{кр}}^2$, то H_0 отвергается, т.е. сравниваемые распределения достоверно отличаются. Если $\chi_{\text{эм}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$, то H_0 принимается.

Рассмотрим несколько примеров решения задач с использованием χ^2 -критерия Пирсона.

Случай 1. Сравнение эмпирического распределения с теоретическим (равномерным).

Пример 1 [9]. В эксперименте испытуемый должен выбрать здание на правом или левом столе. В инструкции подчеркивают, что задания на обоих столах одинаковы. Из 150 испытуемых правый стол выбрали 98 человек, а левый – 52. Можно ли утверждать, что полученное распределение отличается от равномерного?

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : полученное распределение выбора стола с заданием не отличается от равномерного.

H_1 : полученное распределение выбора стола с заданием отличается от равномерного.

Для проверки согласованности эмпирического распределения с равномерным построим таблицу, в которой произведем необходимые расчеты, предварительно определив теоретическую частоту и число степеней свободы.

При равномерном распределении правый и левый стол должны выбрать одинаковое количество человек. Тогда $f_m = (98 + 52) : 2 = 150 : 2 = 75$.

Признак принимает всего два значения, т.е. число разрядов равно двум. Тогда число степеней свободы равно $\nu = k - 1 = 2 - 1 = 1$. В этом случае необходимо внести поправку на

непрерывность, уменьшив абсолютную величину разности частот на 0,5.

Альтернативы выбора стола	$f_{\text{э}}$	f_m	$(f_{\text{э}} - f_m - 0,5)$	$(f_{\text{э}} - f_m - 0,5)^2$	$(f_{\text{э}} - f_m - 0,5)^2 : f_m$
Правый	98	75	$+(23-0,5) = 22,5$	506,25	6,75
Левый	52	75	$-(23-0,5) = -22,5$	506,25	6,75
Сумма	150	150	0		13,5

В соответствии с алгоритмом, сумма значений, представленных в шестом столбце, и есть эмпирическое значение критерия: $\chi_{\text{эм}}^2 = 13,5$.

По таблице Приложения 18 находим критические значения χ^2 -критерия для числа степеней свободы $\nu = 1$:

$$\chi_{\text{кр}}^2 = \begin{cases} 3,841, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 6,635, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $\chi_{\text{эм}}^2 > \chi_{\text{кр}}^2$ при уровне значимости $p = 0,01$. Следовательно, H_0 отклоняется и принимается H_1 , распределение признака отлично от равномерного, т.е. испытуемые статистически значимо предпочитают выбирать задание на правом столе.

Примечание. Производя расчеты, необходимо всякий раз убеждаться, что сумма разностей между эмпирическими и теоретическими частотами (четвертый столбец) равна нулю. Если это условие не выполняется, это означает, что в предыдущих вычислениях допущена ошибка. Необходимо ее устранить, прежде чем переходить к дальнейшим вычислениям [27].

Случай 2. Сравнение эмпирического распределения с теоретическим (нормальным).

Пример 2 [14]. У 100 испытуемых измерили уровень нейротизма по тесту Айзенка. Результаты представлены в таблице:

Нейро- тизм	Число испытуе- мых	Нейро- тизм	Число испытуе- мых	Нейро- тизм	Число испытуе- мых	Нейро- тизм	Число испытуе- мых
x_i	$f_{\text{э}}$	x_i	$f_{\text{э}}$	x_i	$f_{\text{э}}$	x_i	$f_{\text{э}}$
1	0	7	3	13	10	19	4
2	0	8	4	14	8	20	3
3	0	9	6	15	9	21	1
4	0	10	8	16	9	22	0
5	2	11	9	17	8	23	0
6	3	12	7	18	6	24	0

Определить соответствие эмпирического распределения теоретическому (нормальному) распределению с помощью критерия χ^2 Пирсона.

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : полученное распределение испытуемых по уровню нейротизма не отличается от нормального.

H_1 : полученное распределение испытуемых по уровню нейротизма отличается от нормального.

Задача решается в три этапа:

1. Определим среднее значение переменной и ее стандартное отклонение. Поскольку в условии представлено статистическое распределение частот, то для вычисления среднего арифметического воспользуемся следующей формулой:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_k f_k}{n} = \frac{1}{n} \sum x_i f_i.$$

Подставляем в формулу значения нейротизма и соответствующие ему частоты из условия задачи: $\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + \dots + 21 \cdot 1}{100} = 13,2$.

Определим стандартное отклонение по следующей формуле: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$.

В нашем случае $\sigma = \sqrt{\frac{(5-13,2)^2 \cdot 2 + (6-13,2)^2 \cdot 3 + \dots + (21-13,2)^2 \cdot 1}{100}} \approx 3,8$.

2. Нормируем полученные результаты в единицах стандартного отклонения с «шагом» в 1σ (8-классовое распределение). Для этого строим шкалу значений в единицах стандартного отклонения от -4σ до $+4\sigma$. Далее определяем границы каждого из 8 классов в абсолютных значениях исследуемого показателя (уровней нейротизма). В качестве точки отсчета возьмем среднее арифметическое значение $\bar{x} = 13,2$ ($\sigma = 0$). После этого определяем границы классов в абсолютных единицах (значениях нейротизма), последовательно вычитая из среднего (слева от точки отсчета) или добавляя к среднему (справа от нее) величину стандартного отклонения $\sigma = 3,8$. Наконец, подсчитываем частоты (число испытуемых) в каждом из классов и разносим полученные значения по классам теоретического распределения. Для большей наглядности представим результаты в виде следующей схемы:

-4σ	-3σ	-2σ	$-\sigma$	0	σ	2σ	3σ	4σ
0	2	16	34	30	17	1	0	
-2,0	1,8	5,6	9,4	13,2	17,0	20,8	24,6	28,4

3. Составим таблицу для вычисления критерия χ^2 Пирсона. В столбце 1 разместим классы распределения (в единицах стандартного отклонения), в столбце 2 – вычисленные эмпирические частоты для каждого класса, в столбце 3 – теоретические частоты в процентном соотношении, которые определяются на основе правила 3σ . Так, 68,26% вариант всегда лежат в диапазоне $-1\sigma \div +1\sigma$ от среднего значения, тогда в интервале $-1\sigma \div 0$ будет расположена половина этих значений: $68,26:2 = 34,13\%$ значений и т.д. (см. п. 4 темы 4). Последний столбец служит для попарного сопоставления эмпирических и теоретических частот с помощью формулы $(f_{\text{э}} - f_{\text{м}})^2 : f_{\text{м}}$. Тогда таблица примет следующий вид:

Границы класса	Частоты		$(f_{\text{э}} - f_{\text{м}})$	$(f_{\text{э}} - f_{\text{м}})^2$	$(f_{\text{э}} - f_{\text{м}})^2 : f_{\text{м}}$
	$f_{\text{э}}$	$f_{\text{м}}$			
$-4\sigma \div -3\sigma$	0	0,13	-0,13	0,0169	0,13
$-3\sigma \div -2\sigma$	2	2,15	-0,15	0,0225	0,01
$-2\sigma \div -\sigma$	16	13,59	2,41	5,808	0,43
$-1\sigma \div 0$	34	34,13	-0,13	0,0169	0
$0 \div 1\sigma$	30	34,13	-4,13	17,057	0,50
$1\sigma \div 2\sigma$	17	13,59	3,41	11,628	0,86
$2\sigma \div 3\sigma$	1	2,15	-1,15	1,323	0,62
$3\sigma \div 4\sigma$	0	0,13	-0,13	0,0169	0,13

Сумма			0		2,68
-------	--	--	---	--	------

Эмпирическое значение χ^2 -критерия вычисляется как сумма значений в столбце 4 таблицы. Тогда $\chi_{\text{эм}}^2 = 2,68$.

В таблице Приложения 18 находим критические значения χ^2 . Для 8-классового распределения ($N = 8$) число степеней свободы $\nu = N - 3 = 5$. Тогда

$$\chi_{\text{кр}}^2 = \begin{cases} 11,070, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 15,086 & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Для двух стандартных уровней значимости $\chi_{\text{эм}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$. Следовательно, H_0 принимается: эмпирическое распределение статистически не отличается от теоретического (нормального), т.е. распределение испытуемых по уровню нейротизма соответствует нормальному распределению.

Примечания [14]:

1. Если по каким-либо причинам результаты анализа не удовлетворяют исследователя (например, $\chi_{\text{эм}}^2 \approx \chi_{\text{кр}}^2$), можно воспользоваться таблицей 16-классового распределения. В данном случае диапазон вариаций также составляет $-4\sigma \div +4\sigma$, но ширина каждого класса вдвое меньше ($0,5\sigma$). Кроме того, следует учесть, что при сравнении эмпирического значения χ^2 с критическим число степеней свободы составляет $N - 3 = 16 - 3 = 13$.

2. Необходимо помнить, что теоретические частоты рассчитаны в процентном соотношении. При решении предыдущей задачи объем выборки составлял 100 человек, поэтому никаких дополнительных преобразований не требовалось. В том же случае, когда $n \neq 100$, необходимо эмпирические частоты привести к теоретическим (но не наоборот). Например, если $n = 200$, то эмпирическую частоту в каждом классе следует разделить на 2, если $n = 50$, то умножить на 2. Если, предположим, $n = 52$, то необходимо каждую эмпирическую частоту умножить на пересчетный коэффициент (в данном случае $k = 100:52 = 1,923$).

Сравнение эмпирического и теоретического распределений с помощью χ^2 -критерия Пирсона удобно производить с помощью универсальных статистических пакетов [10, с. 186–193].

Случай 3. Сравнение двух эмпирических распределений.

В этом случае для расчета теоретической частоты по каждому разряду используют следующую формулу [27]:

$$f_{\text{эм}} = \frac{(\text{сумма частот по соответствующей строке}) \times (\text{сумма частот по соответствующему столбцу})}{\text{общая сумма частот}}$$

Соответствующими строкой и столбцом будут та строка и тот столбец, на пересечении которых находится данная ячейка таблицы.

Пример 3 [13]. Во время проведения социологического опроса старшеклассникам было предложено выбрать один из трех профилей обучения (математический, естественнонаучный, гуманитарный). Среди опрошенных были юноши и девушки. Результаты опроса сведены в таблицу кросс-табуляции размером 2×3 .

Пол респондентов	Профиль обучения		
	математический	естественнонаучный	гуманитарный
Юноши	18	10	3
Девушки	10	9	15

Отличаются ли распределения предпочтений профиля обучения у юношей и девушек?

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : распределения предпочтений профиля обучения у юношей и девушек не отличаются.

H_1 : распределения предпочтений профиля обучения у юношей и девушек отличаются.

Для того чтобы воспользоваться χ^2 -критерием, необходимо подсчитать суммы частот по строкам и столбцам в таблице данных. В результате исходная таблица примет следующий вид:

Пол респон- дентов	Профиль обучения			Сумма частот по строкам
	математический	естественнонаучный	гуманитарный	
Юноши	18	10	3	31
Девушки	10	9	15	34
Сумма частот по столбцам	28	19	18	65

Вычислим число степеней свободы для таблицы кросс-табуляции размером 2x3 по формуле $\nu = (k - 1) \cdot (c - 1) = (2 - 1) \cdot (3 - 1) = 1 \cdot 2 = 2$. В данном случае не требуется вносить поправку на непрерывность.

Построим таблицу для вычисления эмпирического значения критерия и произведем в ней необходимые расчеты:

Выбор профиля	f_{ε}	f_m	$f_{\varepsilon} - f_m$	$(f_{\varepsilon} - f_m)^2$	$(f_{\varepsilon} - f_m)^2 : f_m$
Юноши – математический	18	$31 \cdot 28 : 65 = 13,35$	4,65	21,59	1,62
Юноши – естественнонаучный	10	$31 \cdot 19 : 65 = 9,06$	0,94	0,88	0,10
Юноши – гуманитарный	3	$31 \cdot 18 : 65 = 8,58$	-5,58	31,19	3,63
Девушки – математический	10	$34 \cdot 28 : 65 = 14,65$	-4,65	21,59	1,47
Девушки – естественнонаучный	9	$34 \cdot 19 : 65 = 9,94$	-0,94	0,88	0,09
Девушки – гуманитарный	15	$34 \cdot 18 : 65 = 9,42$	5,58	31,19	3,31
Сумма	65		0		10,22

Таким образом, эмпирическое значение критерия равно 10,22.

При помощи таблицы критических значений (таблица Приложения 18) сравниваем полученное эмпирическое значение с критическим для числа степеней свободы $\nu = 2$:

$$\chi_{кр}^2 = \begin{cases} 5,992, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 9,211, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $\chi_{эм}^2 > \chi_{кр}^2$ при уровне значимости $p = 0,01$. Следовательно, H_0 отклоняется и принимается H_1 , распределения предпочтений профиля обучения у юношей и девушек значимо отличаются.

Примечание [27]. Одно из ограничений χ^2 -критерия заключается в том, что теоретически на каждый разряд должно приходиться не менее пяти наблюдений:

$f_m \geq 5$. Если признак принимает большое количество значений (например 90), и каждое из них принимается за самостоятельный разряд, то необходимо не менее $90 \cdot 5 = 450$ наблюдений. Если же наблюдений меньше 450, то для применения критерия приходится укрупнять разряды (объединяя несколько разрядов в один), пока на каждый объединенный разряд не будет приходиться по 5 наблюдений. Это не означает, что в каждом разряде реально должно быть 5 наблюдений; это означает, что теоретически на каждый разряд их приходится по 5. Для принятия решения о том, какие разряды следует объединить, чтобы выполнялось условие $f_m \geq 5$, пользуются следующей формулой расчета минимальной суммы частот по строке:

$$f_{\min \text{ по строке}} = \frac{5 \times (\text{общее количество наблюдений})}{\text{сумма частот по столбцу с наименьшим количеством наблюдений}}$$

Затем объединяют в один разряд такое количество строк, чтобы сумма соответствующих им частот была не меньше $f_{\min \text{ по строке}}$ (пример см. [27, с. 137–141]).

Сопоставить эмпирические распределения с помощью χ^2 -критерия Пирсона можно с помощью универсальных статистических пакетов [10, с. 198–204].

2.2. λ -критерий Колмогорова-Смирнова [9; 27]

Назначение. Используется для сравнения эмпирического распределения признака с теоретическим (равномерным, нормальным) или сопоставления двух эмпирических распределений одного и того же признака.

Описание. В отличие от χ^2 -критерия, который основан на сравнении частот двух распределений, λ -критерий предполагает сравнение накопленных (кумулятивных) частот по каждому разряду. Критерий позволяет найти точку, в которой сумма накопленных расхождений является наибольшей, и оценить достоверность этого расхождения. Чем больше разность накопленных частот, тем более существенны различия между двумя распределениями.

Ограничения:

1) измерение должно быть проведено в количественных шкалах, и эмпирические данные должны допускать возможность упорядочения. Если данные нельзя упорядочить, применяют χ^2 -критерий;

2) при сопоставлении двух эмпирических распределений объемы выборок должны быть достаточно большими: $n_1 \geq 50$, $n_2 \geq 50$;

3) сопоставление эмпирического распределения с теоретическим допускается при $n \geq 5$.

Гипотезы:

H_0 : различия между двумя распределениями недостоверны.

H_1 : различия между двумя распределениями достоверны.

Применение критерия различно в случае сопоставления эмпирического распределения с теоретическим и при сравнении двух эмпирических распределений.

Алгоритм сопоставления эмпирического распределения с теоретическим (равномерным) [9]:

1. Занести в таблицу наименования разрядов (первый столбец) и соответствующие им эмпирические частоты ($f_{\text{э}}$), упорядоченные по возрастанию (второй столбец).

2. Вычислить соответствующие теоретические частоты равномерного распределения (f_m), вписать их в третий столбец.

3. Вычислить накопленные эмпирические частоты по каждому разряду ($\Sigma f_{\text{э}}$), занести результаты в четвертый столбец.

4. Вычислить накопленные теоретические частоты по каждому разряду (Σf_m), записать их в пятый столбец.

5. Вычислить разность между соответствующими накопленными эмпирическими и теоретическими частотами по каждому разряду и записать их абсолютные значения в шестой столбец, обозначив их как d .

6. Определить в шестом столбце наибольшую абсолютную величину разности, обозначив ее как d_{max} .

7. Вычислить эмпирическое значение критерия по формуле $d_{\text{эм}} = \frac{d_{\text{max}}}{n}$.

8. Если $n \leq 100$, то для определения критических значений воспользоваться таблицей Приложения 19. Если же $n > 100$, то критические значения определяются следующим образом:

$$d_{\text{кр}} = \begin{cases} 1,36/\sqrt{n}, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 1,63/\sqrt{n}, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

9. Если $d_{\text{эм}} \geq d_{\text{кр}}$, то H_0 отвергается, т.е. эмпирическое распределение достоверно отличается от равномерного. Если $d_{\text{эм}} < d_{\text{кр}}$, то H_0 принимается, сравниваемые распределения достоверно не отличаются.

Пример 4 [9]. Игральный кубик подброшен 120 раз. При этом грань с цифрой 1 выпала 18 раз, с цифрой 2 – 23 раза, с цифрой 3 – 15 раз, с цифрой 4 – 21 раз, с цифрой 5 – 25 раз, с цифрой 6 – 18 раз. Можно ли утверждать, что каждая грань кубика выпала примерно равное число раз?

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : полученное распределение выпадающего числа очков не отличается от равномерного.

H_1 : полученное распределение выпадающего числа очков отличается от равномерного.

Для проверки согласованности эмпирического распределения с равномерным построим таблицу. Число выпавших очков в таблице запишем в таком порядке, чтобы соответствующие им эмпирические частоты были упорядочены по возрастанию.

Определим теоретическую частоту. При равномерном распределении каждая грань кубика должна выпасть одинаковое количество раз. Тогда $f_m = (18 + 23 + 15 + 21 + 25 + 18):6 = 120:6 = 20$. Произведем в таблице необходимые расчеты.

Число выпавших очков	$f_{\text{э}}$	f_m	$\Sigma f_{\text{э}}$	Σf_m	$ \Sigma f_{\text{э}} - \Sigma f_m $
3	15	20	15	20	5

1	18	20	33	40	7
6	18	20	51	60	9
4	21	20	72	80	8
2	23	20	95	100	5
5	25	20	120	120	0

В соответствии с алгоритмом среди абсолютных величин разностей в шестом столбце находим максимальное значение $d_{\max} = 9$. Тогда эмпирическое значение критерия равно $d_{\text{эм}} = d_{\max} / n = 9/120 = 0,075$.

Поскольку $n > 100$, вычислим критические значения по соответствующим формулам:

$$1,36 / \sqrt{n} = 1,36 / \sqrt{120} = 0,124 \text{ и } 1,63 / \sqrt{n} = 1,63 / \sqrt{120} = 0,149.$$

Запишем полученные данные в привычном виде:

$$d_{\text{кр}} = \begin{cases} 0,124, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 0,149, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Тогда $d_{\text{эм}} < d_{\text{кр}}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 принимается, распределение признака не отличается от равномерного.

Алгоритм сопоставления двух эмпирических распределений [27]:

1. Занести в первый столбец таблицы наименования разрядов, а во второй и третий столбцы соответствующие им эмпирические частоты, полученные в распределении 1 ($f_{\text{э}1}$) и в распределении 2 ($f_{\text{э}2}$).

2. Вычислить относительные частоты эмпирического распределения 1 ($f_{\text{э}1}^*$), вписать их в четвертый столбец.

3. Вычислить относительные частоты эмпирического распределения 2 ($f_{\text{э}2}^*$), вписать их в пятый столбец.

4. Вычислить накопленные относительные частоты эмпирического распределения 1 ($\Sigma f_{\text{э}1}^*$), вписать их в шестой столбец.

5. Вычислить накопленные относительные частоты эмпирического распределения 2 ($\Sigma f_{\text{э}2}^*$), вписать их в седьмой столбец.

6. Вычислить разность между накопленными эмпирическими частотами по каждому разряду и записать абсолютные величины разностей в восьмой столбец, обозначив их как d .

7. Определить в восьмом столбце наибольшую абсолютную величину разности d_{\max} .

8. Вычислить эмпирическое значение λ -критерия по формуле

$$\lambda_{\text{эм}} = d_{\max} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}},$$

где n_1 и n_2 – количество наблюдений в первой и второй выборках соответственно.

9. Если $\lambda_{\text{эм}} \geq 1,36$, то H_0 отвергается, различия между распределениями достоверны. Если $\lambda_{\text{эм}} < 1,36$, то H_0 принимается. В случае необходимости по таблице Приложения 20 определить, какому уровню значимости соответствует полученное значение λ .

Пример 5 [27]. В выборке из 102 юношей – студентов технических вузов был проведен тест Люшера в восьмицветовом варианте. Установлено, что желтый цвет предпочитается ис-

пытуемыми чаще, чем отвергается. Аналогичное исследование было проведено на выборке в 800 человек зарубежными психологами, которые установили, что желтый цвет является единственным цветом, распределение которого не отличается от равномерного. Данные представлены в таблице. Отличается ли распределение желтого цвета в двух выборках?

Позиции желтого цвета	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
Частота (отечественная выборка)	24	15	13	8	15	10	9	8	112
Частота (зарубежная выборка)	98	113	116	87	91	112	97	86	800

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : распределения желтого цвета по восьми позициям в двух выборках не различаются.

H_1 : распределения желтого цвета по восьми позициям в двух выборках различаются.

Проведем все расчеты в соответствии с алгоритмом и представим их в виде таблицы.

Позиции желтого цвета	Эмпириче- ские частоты		Относительные эм- пирические частоты		Накопленные относитель- ные эмпирические частоты		Разность $\Sigma f_{\text{э}1}^* - \Sigma f_{\text{э}2}^*$
	$f_{\text{э}1}$	$f_{\text{э}2}$	$f_{\text{э}1}^*$	$f_{\text{э}2}^*$	$\Sigma f_{\text{э}1}^*$	$\Sigma f_{\text{э}2}^*$	
1	24	98	0,235	0,123	0,235	0,123	0,112
2	15	113	0,147	0,141	0,382	0,264	0,118
3	13	116	0,128	0,145	0,510	0,409	0,101
4	8	87	0,078	0,109	0,588	0,518	0,070
5	15	91	0,147	0,114	0,735	0,632	0,103
6	10	112	0,098	0,140	0,833	0,772	0,061
7	9	97	0,088	0,121	0,921	0,893	0,028
8	8	86	0,079	0,107	1,000	1,000	0
Сумма	102	800	1,000	1,000			

Максимальная разность между накопленными относительными эмпирическими частотами составляет 0,118 и падает на второй разряд. Тогда эмпирическое значение критерия равно

$$\lambda_{\text{эм}} = d_{\text{max}} \sqrt{[(n_1 \cdot n_2)/(n_1 + n_2)]} = 0,118 \sqrt{[(102 \cdot 800)/(102 + 800)]} = 0,118 \sqrt{[81600/902]} = 0,118 \sqrt{90,47} \approx 0,118 \cdot 9,51 \approx 1,12.$$

По таблице Приложения 20 определим уровень значимости полученного значения: $p = 0,16$. Критические значения, соответствующие принятым уровням значимости 0,05 и 0,01 равны 1,36 и 1,63 соответственно. Запишем полученные данные в привычном виде:

$$\lambda_{\text{кр}} = \begin{cases} 1,36, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 1,63, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

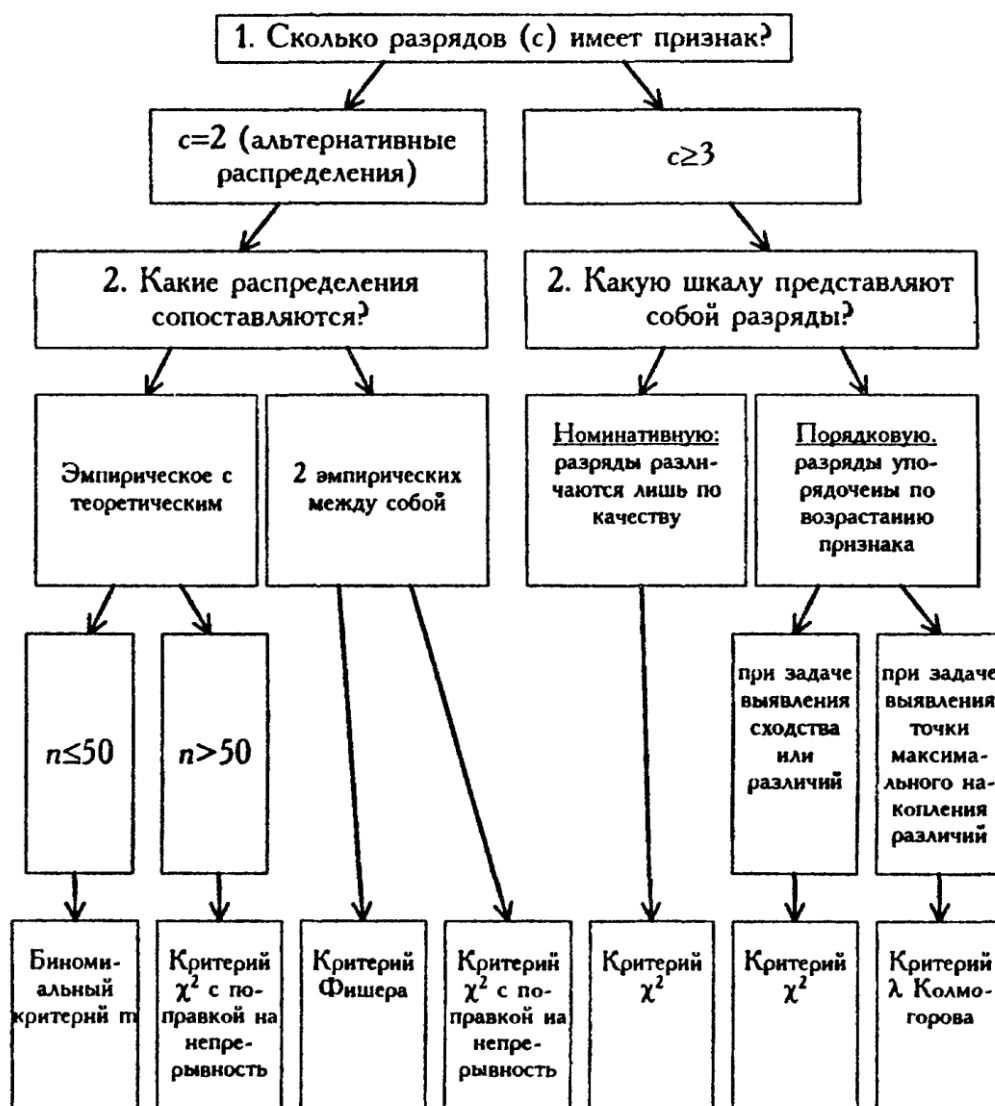
Тогда $\lambda_{\text{эм}} < \lambda_{\text{кр}}$ при уровне значимости $p = 0,05$. Следовательно, H_0 принимается, т.е. эмпирические распределения желтого цвета по восьми позициям в двух выборках не различаются. Однако они по-разному соотносятся с равномерным распределением.

3. Алгоритм выбора критерия для сравнения распределений.

Принимая решение о выборе критерия для сравнения распределений, можно воспользоваться алгоритмом, предложенным Е.В. Сидоренко [27, с. 156]:

АЛГОРИТМ

выбора критерия для сравнения распределений



Вопросы для самоконтроля:

1. Какое распределение признака называют эмпирическим?
2. Какое распределение признака называют теоретическим?
3. В каком случае необходимо произвести сопоставление эмпирического распределения с теоретическим (нормальным, равномерным)?
4. В каком случае необходимо сравнить два эмпирических распределения?
5. Какие методы используются для определения согласия распределений?
6. Перечислите задачи, решение которых возможно только с помощью критериев для сравнения распределений.
7. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления χ^2 -критерия Пирсона.
8. В чем заключаются особенности применения χ^2 -критерия Пирсона при сопоставлении эмпирического распределения с равномерным?
9. Каковы особенности применения χ^2 -критерия Пирсона для проверки соответствия эмпирического распределения нормальному распределению?
10. В каком случае при вычислении χ^2 -критерия Пирсона вносят поправку на непрерывность?

11. В каком случае при вычислении χ^2 -критерия Пирсона используют процедуру укрупнения разрядов?

12. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления λ -критерия Колмогорова-Смирнова в случае сопоставления эмпирического распределения с теоретическим.

13. Представьте алгоритм вычисления λ -критерия Колмогорова-Смирнова в случае сопоставления двух эмпирических распределений.

14. Охарактеризуйте алгоритм выбора критерия для сопоставления распределений исследуемого признака.

Тема 13 Многофункциональные критерии

План:

1. Понятие о многофункциональных критериях.
2. ϕ^* -угловое преобразование Фишера.
3. Биномиальный Z-критерий.

Основные понятия и термины: многофункциональные критерии, эффект, ϕ^* -угловое преобразование Фишера, биномиальный Z-критерий.

1. Понятие о многофункциональных критериях [12; 13; 27]

Многофункциональные статистические критерии – это критерии, которые могут быть применены к самым разным данным, выборкам и задачам. Это означает, что:

- а) данные могут быть представлены в любой шкале, начиная с номинальной;
- б) выборки могут быть как зависимые, так и независимые;
- в) с их помощью можно решать и задачи сопоставления уровней исследуемого признака, и задачи оценки достоверности сдвигов в значениях изучаемого признака, и задачи сравнения распределений.

К числу многофункциональных критериев относятся ϕ^* -угловое преобразование Фишера и биномиальный Z-критерий. Эти критерии построены на сопоставлении долей, выраженных в частях целого или в процентах. Суть критериев состоит в определении того, какая доля наблюдений в данной выборке характеризуется интересующим исследователя эффектом, а какая – этим эффектом не характеризуется, т.е. любые данные сводятся к шкале «есть эффект – нет эффекта». В качестве такого *эффекта* может выступать:

- а) определенное значение качественно определяемого признака (например, отнесенность к определенному полу, выбор правой дорожки из двух симметричных и т.д.);

б) определенный уровень количественно измеряемого признака (например, решение задачи менее чем за 40 с или получение баллов, превышающих проходной и т.д.);

в) определенное соотношение значений или уровней исследуемого признака (например, преобладание положительных сдвигов над отрицательными).

Многофункциональные критерии могут эффективно заменить или дополнить традиционные критерии (Q -критерий Розенбаума, U -критерий Манна-Уитни, χ^2 -критерий Пирсона, λ -критерий Коломогорова-Смирнова). Такая замена полезна в следующих случаях:

1. Когда традиционные критерии неприменимы: например, Q -критерий нельзя применить вследствие совпадения диапазонов значений двух выборок (и S_1 , и S_2 близки к нулю) или U -критерий неприменим вследствие того, что количество наблюдений превышает 60.

2. Другие критерии неэффективны, т.е. не устанавливают достоверных различий, что особенно характерно для λ -критерия. В этом случае с помощью λ -критерия устанавливают точку максимально накопленного расхождения между распределениями, а затем применяют ϕ^* -критерий для установления достоверности различий.

3. Если другие критерии слишком громоздки. Это чаще всего относится к χ^2 -критерию. Его можно заменить ϕ^* -критерием, если сравниваются распределения признака в двух выборках, а сам признак принимает всего два значения. Биномиальный критерий может заменить χ^2 -критерий в случае альтернативных распределений, например, выбор правой или левой дорожки.

1. Критерий ϕ^* -угловое преобразование Фишера [27]

Назначение. Предназначен для сопоставления двух выборок по частоте встречаемости исследуемого эффекта.

Описание. Позволяет оценить достоверность различий между процентными долями двух выборок, в которых зарегистрирован изучаемый эффект. Угловое преобразование Фишера состоит в переводе процентных долей в величины центрального угла, который измеряется в радианах:

$$\phi = 2 \arcsin \sqrt{P}, \text{ где } P - \text{процентная доля.}$$

Графически ϕ -критерий можно представить следующим образом. Ста процентам соответствует угол в 180° или в π радиан, где $\pi = 3,142$. Тогда всю выборку можно представить в виде полукруга. Процентные доли испытуемых, у которых «есть эффект», будут представлены как секторы, образованные центральными углами. Большей процентной доле будет соответствовать больший угол.

Например, в первой выборке 60% испытуемых решили задачу. Этой процентной доле соответствует угол $\phi = 1,772$ рад. Во второй выборке решили задачу 40% испытуемых. Этой процентной доле соответствует угол $\phi = 1,369$ рад. [26, с. 160]:



Рис. 13.1. Графическое представление углов, образованных процентными долями испытуемых, решивших задачу в группе 1 (слева) и в группе 2 (справа); отсчет углов идет справа налево

φ^* -критерий Фишера позволяет определить, действительно ли один из углов статистически достоверно превосходит другой при данных объемах выборки.

Его целесообразно использовать в следующих случаях:

- 1) при сопоставлении выборок как по качественно определяемому, так и по количественно измеряемому признаку;
- 2) при сопоставлении выборок и по уровню, и по распределению признака;
- 3) в сочетании с λ -критерием для достижения более точного результата.

Ограничения:

- 1) если $n_1 = 2$, то $n_2 \geq 30$; если $n_1 = 3$, то $n_2 \geq 7$; если $n_1 = 4$, то $n_2 \geq 5$; если $n_1 \geq 5$, то $n_2 \geq 5$;
- 2) верхняя граница выборки не определена, т.е. выборки могут быть сколь угодно большими;
- 3) измерения могут быть проведены в любой шкале; выборки могут быть как зависимые, так и независимые;
- 4) ни одна из сопоставляемых долей не должна быть равна нулю.

Гипотезы:

H_0 : доля лиц, у которых проявляется исследуемый эффект, в выборке 1 не больше, чем в выборке 2.

H_1 : доля лиц, у которых проявляется исследуемый эффект, в выборке 1 больше, чем в выборке 2.

Алгоритм:

1. Определить критерий для разделения испытуемых на тех, у кого «есть эффект», и тех, у кого «нет эффекта». В случае количественно измеренного признака использовать λ -критерий для поиска оптимальной точки разделения.

2. Начертить таблицу 2×2 , где первый столбец – «есть эффект», а второй – «нет эффекта»; первая строка – выборка 1, а вторая – выборка 2.

3. Подсчитать количество испытуемых, у которых «есть эффект» и «нет эффекта» для каждой выборки. Занести данные в соответствующие столбцы таблицы.

4. Подсчитать сумму по ячейкам первой строки. Она должна совпасть с количеством испытуемых первой выборки. Аналогичные расчеты произвести по второй строке.

5. Определить процентную долю испытуемых выборки 1, у которых «есть эффект», разделив для этого их количество на общее количество испытуемых выборки. Аналогичные расчеты произвести для выборки 2.

6. Проверить, не равняется ли одна из сопоставляемых процентных долей нулю. Если это так, то сдвинуть точку разделения групп в ту или иную сторону.

Если это невозможно, то вместо φ^* -критерия использовать χ^2 -критерий.

7. Определить по таблице Приложения 21 величины углов φ для каждой из сопоставляемых долей.

8. Подсчитать эмпирическое значение критерия по формуле

$$\varphi_{\text{эм}}^* = (\varphi_1 - \varphi_2) \times \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}},$$

где φ_1 – угол, соответствующий большей процентной доле, φ_2 – угол, соответствующий меньшей процентной доле; n_1 – количество наблюдений в выборке 1, n_2 – количество наблюдений в выборке 2.

9. Сопоставить эмпирическое и критическое значение критерия:

$$\varphi_{\text{кр}}^* = \begin{cases} 1,64, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 2,31, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Если $\varphi_{\text{эм}}^* \geq \varphi_{\text{кр}}^*$ при $p = 0,05$, то H_0 отвергается.

10. При необходимости определить точный уровень значимости полученного $\varphi_{\text{эм}}^*$ по специальным таблицам (Приложение 22).

Пример 1 [14]. Различаются ли между собой две группы студентов по успешности выполнения достаточно сложной задачи, если в первой группе из 20 человек с ней справилось 12 студентов, во второй – 10 человек из 25.

Решение. К испытуемым, у которых «есть эффект», отнесем студентов, решивших задачу. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : количество студентов, решивших задачу, в выборке 1 не больше, чем в выборке 2.

H_1 : количество студентов, решивших задачу, в выборке 1 больше, чем в выборке 2.

Построим таблицу и занесем в нее исходные данные:

	Решили задачу	Не решили задачу	Всего
1-я выборка	12 (60%)	8	20
2-я выборка	10 (40%)	15	25

Вычислим процентные доли для выборки 1: $P_1 = 12 / 20 \times 100\% = 60\%$.

Вычислим процентные доли для выборки 2: $P_2 = 10 / 25 \times 100\% = 40\%$.

В таблице Приложения 21 находим соответствующие процентным долям значения φ :

$\varphi_1 = 1,772$, $\varphi_2 = 1,369$.

Подсчитаем эмпирическое значение критерия по формуле

$\varphi_{\text{эм}}^* = (\varphi_1 - \varphi_2) \times \sqrt{[(n_1 \times n_2) / (n_1 + n_2)]} = (1,772 - 1,369) \times \sqrt{[(20 \times 25) / (20 + 25)]} = 0,403 \times \sqrt{[500 / 45]} = 0,403 \times \sqrt{11,11} = 0,403 \times 3,33 = 1,34$.

Сопоставим полученное эмпирическое значение с критическим:

$$\varphi_{\text{кр}}^* = \begin{cases} 1,64, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 2,31, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi_{\text{эм}}^* < \varphi_{\text{кр}}^*$, то H_0 принимается. Различия между двумя группами студентов по успешности выполнения задачи не являются статистически достоверными.

2. Биномиальный Z-критерий [12; 13; 14]

Иногда при проведении исследования необходимо сравнить две выборки или два замера, произведенных на одной выборке, по частотным показателям. В этом случае целесообразно использовать биномиальный Z-критерий.

Назначение. Используется для сопоставления двух выборок (двух замеров на одной выборке) по частоте встречаемости изучаемого признака.

Описание. Это непараметрический метод, который позволяет оценить достоверность различий между частотными показателями исследуемого признака в двух независимых выборках [13] или установить достоверность преобладания частоты типичного сдвига в двух зависимых выборках [12; 14].

Ограничения:

- 1) измерения могут быть проведены в любой шкале;
- 2) выборки могут быть как зависимые, так и независимые;
- 3) ни одна из сопоставляемых частот не должна быть равна нулю.

Гипотезы:

H_0 : исследуемый признак встречается в выборке 1 не чаще, чем в выборке 2.

H_1 : исследуемый признак встречается в выборке 1 чаще, чем в выборке 2.

Алгоритм:

1. Определить частоту встречаемости признака в выборке 1 (или частоту типичных сдвигов в выборке).
2. Определить частоту встречаемости признака в выборке 2 (или частоту нетипичных сдвигов в выборке).
3. Вычислить сумму частотных показателей n (сумму типичных и нетипичных сдвигов, исключив из рассмотрения нулевые сдвиги).
4. Рассчитать эмпирическое значение критерия по формуле

$$Z_{\text{эм}} = \frac{(X \pm 0,5) - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}},$$

где X – значение одного из двух частотных показателей,

n – сумма частотных показателей,

0,5 – поправочный коэффициент, который прибавляют к X , если $X < n/2$, или вычитают, если $X > n/2$.

5. Сопоставить эмпирическое и критическое значение критерия:

$$Z_{\text{кр}} = \begin{cases} 1,64, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 2,31, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Если $|Z_{\text{эм}}| \geq Z_{\text{кр}}$ при $p = 0,05$, то H_0 отвергается.

Пример 2 [27]. Участники тренинга сенситивности выполняли упражнение «Психологический прогноз». По его результатам участник A дал 12, а участник B 4 точных прогноза из 14 возможных. Является ли преобладание правильных прогнозов у участника A и неправильных прогнозов у участника B случайным?

Решение. Ответим на первый вопрос задачи. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : правильные прогнозы у испытуемого A встречаются не чаще, чем неправильные.

H_1 : правильные прогнозы у испытуемого A встречаются чаще, чем неправильные.

По условию число правильных прогнозов 12, общее число прогнозов – 14. Тогда число неправильных прогнозов равно 2. Вычислим эмпирическое значение критерия, взяв в качестве частотного показателя $X = 12$. Поскольку выполняется условие $X > n/2$, т.к. $12 > 14/2$, то формула будет иметь вид:

$$Z_{\text{эм}} = [(X - 0,5) - n/2] : \sqrt{n/2} = [(12 - 0,5) - 14/2] : \sqrt{14/2} = [11,5 - 7] : \sqrt{7} = 4,5 : 2,65 \approx 1,69.$$

Сопоставим эмпирическое и критическое значения критерия:

$$Z_{\text{кр}} = \begin{cases} 1,64, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 2,31, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Поскольку $|Z_{\text{эм}}| \geq Z_{\text{кр}}$ при $p = 0,05$, то H_0 отвергается, т.е. преобладание правильных ответов у участника A не является случайным.

Ответим на второй вопрос задачи. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : неправильные прогнозы у испытуемого B встречаются не чаще, чем правильные.

H_1 : неправильные прогнозы у испытуемого B встречаются чаще, чем правильные.

По условию общее число прогнозов – 14, число правильных прогнозов 4. Следовательно, число неправильных прогнозов равно 10. Вычислим эмпирическое значение критерия, взяв в качестве частотного показателя $X = 10$. Поскольку выполняется условие $X > n/2$, т.к. $10 > 14/2$, то формула будет иметь вид:

$$Z_{\text{эм}} = [(X - 0,5) - n/2] : \sqrt{n/2} = [(10 - 0,5) - 14/2] : \sqrt{14/2} = [9,5 - 7] : \sqrt{7} = 2,5 : 2,65 \approx 0,94.$$

Сопоставим эмпирическое и критическое значения критерия:

$$Z_{\text{кр}} = \begin{cases} 1,64, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 2,31, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Поскольку $|Z_{\text{эм}}| < Z_{\text{кр}}$ при $p = 0,05$, то H_0 принимается, т.е. преобладание неправильных прогнозов у участника B является случайным.

Примечание. Отдельные авторы (например, Е.В. Сидоренко [27]) биномиальным m -критерием называют метод сопоставления эмпирического распределения с теоретическим, который проверяет гипотезу о том, что частота встречаемости исследуемого эффекта не превышает заданную вероятность $p \leq 0,05$. Этот критерий рассматриваться нами не будет.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие критерии называют многофункциональными?
2. Какие типы задач могут решать многофункциональные критерии?
3. В чем состоит суть многофункциональных критериев?
4. Что может рассматриваться в качестве эффекта при применении многофункциональных критериев?
5. Какие критерии относятся к многофункциональным критериям?
6. В каком случае многофункциональные критерии являются эффективной заменой традиционных критериев?
7. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления ϕ^* -критерия Фишера.
8. Представьте назначение, ограничения и алгоритм вычисления Z -критерия.

Тема 14 Дисперсионный анализ

План:

1. Понятие о дисперсионном анализе.
2. Подготовка данных к дисперсионному анализу.
3. Однофакторный дисперсионный анализ:
 - 3.1. однофакторный дисперсионный анализ для независимых выборок;
 - 3.2. однофакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок.
4. Двухфакторный дисперсионный анализ:
 - 4.1. двухфакторный дисперсионный анализ для независимых выборок;
 - 4.2. двухфакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок.

Основные понятия и термины: *дисперсионный анализ, фактор, результативный признак, градации (условия действия) фактора, дисперсионный комплекс, ячейки комплекса, равномерный дисперсионный комплекс, однофакторный дисперсионный анализ, двухфакторный дисперсионный анализ, многофакторный дисперсионный анализ.*

1. Понятие о дисперсионном анализе [27]

Дисперсионный анализ – ANOVA (от англ. Analysis of Variance – анализ вариативности) – это метод, который используется для анализа изменений признака под влиянием контролируемых переменных факторов. Например, как изменяется время решения задачи: а) при разных способах ее предъявления (устно, письменно, графически); б) при разных условиях ее выполнения (индивидуально, в группе, в паре); в) при разном уровне мотивации испытуемых (высоком, низком).

В дисперсионном анализе (в отличие от корреляционного) считают, что одни переменные могут рассматриваться как причины, другие – как следствия. Независимые переменные, которые экспериментатор изменяет по своему усмотрению, называют *факторами* и рассматривают их как причину. Зависимую переменную, которая изменяется под влиянием факторов, называют *результативным признаком* и рассматривают как следствие. В предыдущем примере факторами являются способ предъявления задачи, условие выполнения задачи, уровень мотивации испытуемого, а результативным признаком служит время решения задачи.

Фактор в дисперсионном анализе предполагает определенную *градацию*. При этом подразумевается, что сила фактора возрастает при переходе от градации к градации. Если градации фактора отличаются качественно, их называют *условиями действия фактора*. Например, если в качестве фактора рассмотреть способ предъявления задачи, то условиями действия фактора (его градациями) будут устное предъявление, письменное предъявление и графическое предъявление задачи.

При разделении исследуемых переменных на факторы и результативные признаки возможны две ситуации:

1. На испытуемых осуществляется какое-либо воздействие, которое мы считаем независимой переменной (фактором), а исследуемые признаки, изменяющиеся под их влиянием, считаем зависимой переменной, т.е. результативным признаком. Например, исследователь предъявляет задачу различными способами (фактор) и анализирует время решения задачи (результативный признак).

2. Не совершая никаких воздействий, считаем, что при разных уровнях развития одних психологических признаков другие проявляются тоже по-разному. При этом определение того, какая переменная является фактором, а какая результативным признаком, весьма субъективно. Например, мы считаем, что уровень социальной смелости торгового представителя (фактор) влияет на объем заключенных им договоров (результативный признак). Однако вполне возмож-

но, что чем больше торговый представитель заключает сделок (фактор), тем более социально смелым (результативный признак) он становится.

Эмпирические данные, представленные по градациям фактора, называют *дисперсионным комплексом*. Данные, относящиеся к отдельным градациям, называют *ячейками комплекса*.

Цель дисперсионного анализа – выявить взаимодействие двух и более факторов в их влиянии на одну и ту же зависимую переменную. Для этого из общей дисперсии (вариативности признака) выделяют три вида вариативности:

- 1) вариативность, обусловленную действием каждой из исследуемых независимых переменных;
- 2) вариативность, обусловленную взаимодействием исследуемых независимых переменных;
- 3) случайную вариативность, обусловленную действием всех других неизвестных переменных.

Затем вариативность, обусловленная действием исследуемых переменных и их взаимодействием, соотносится со случайной вариативностью. Показателем этого соотношения является F -критерий Фишера. Чем в большей степени вариативность признака обусловлена исследуемыми факторами или их взаимодействием, тем выше эмпирические значения критерия.

В формулу расчета критерия входят оценки дисперсий (т.е. параметров распределения признака), поэтому F -критерий является параметрическим.

Дисперсионный анализ констатирует изменение результативного признака, но не указывает направление изменений. Чтобы его установить, надо представить полученные данные графически по градациям фактора.

С помощью дисперсионного анализа можно исследовать различные выборки (зависимые и независимые, равные и неравные по численности), а также разное количество выборок (две, три и более).

Выделяют три вида дисперсионного анализа:

- 1) *однофакторный дисперсионный анализ* изучает влияние одного фактора на зависимую переменную;
- 2) *двухфакторный дисперсионный анализ* исследует влияние двух факторов на результативный признак;
- 3) *многофакторный дисперсионный анализ* (MANOVA) исследует влияние более двух факторов на результативный признак.

Однофакторный дисперсионный анализ может быть заменен следующими непараметрическими критериями: а) H -критерием Крускала-Уоллиса в случае независимых выборок; б) χ^2 -критерием Фридмана в случае зависимых выборок. Однако, в отличие от этих критериев, однофакторный дисперсионный анализ позволяет анализировать неограниченные по объему выборки и является более мощным как параметрический критерий.

Двухфакторный и многофакторный дисперсионный анализ никакими другими критериями заменить нельзя, поскольку они исследуют одновременное действие двух и более факторов.

2. Подготовка данных к дисперсионному анализу [27]

Эмпирические данные, подвергающиеся дисперсионному анализу, должны пройти предварительную подготовку, включающую четыре этапа:

1. Создание дисперсионного комплекса (или комплексов) – представление эмпирических данных по градациям фактора. Для каждого испытуемого можно создать отдельную карточку, в которую занести данные по всем исследуемым признакам. Это позволит, в зависимости от задач исследования и гипотез, легко выделять различные градации и изменять факторы и результативные признаки.

2. Уравновешивание комплексов – создание комплексов, в которых каждая ячейка представлена одинаковым количеством наблюдений – *равномерных комплексов*. Для этого лишние значения отсеивают, как правило, путем случайного отбора необходимого количества значений признака. Алгоритм расчетов для неравномерных комплексов более трудоемок.

3. Проверка распределения результативного признака на соответствие нормальному распределению. Для этого используют один из известных методов (метод Н.А. Плохинского, метод Е.И. Пустыльника или χ^2 -критерий).

4. Преобразование эмпирических данных с целью упрощения расчетов. Н.А. Плохинский указывает на возможность следующих преобразований:

а) все наблюдаемые значения x_i умножить на одно и то же число k , отличное от нуля (например, умножить все значения на 10, чтобы избежать дробных значений);

б) все наблюдаемые значения x_i разделить на одно и то же число k , отличное от нуля (например, разделить все значения на 10, чтобы от миллиметров перейти к сантиметрам);

в) от всех наблюдаемых значений x_i отнять одно и то же число A (например, наименьшее значение);

г) сделать двойное преобразование: из каждого значения x_i вычесть число A , затем полученный результат разделить на k .

Проведение этих преобразований приводит к изменению среднего значения измеряемой переменной \bar{x} . Однако его можно восстановить с помощью обратной математической операции. Стандартное отклонение σ изменяется только при введении множителя или делителя и может быть восстановлено путем совершения обратного математического действия.

3. Однофакторный дисперсионный анализ [27]

Однофакторный дисперсионный анализ предназначен для выявления влияния одного фактора на зависимую переменную.

Однофакторный дисперсионный анализ используется в двух вариантах:

- для дисперсионных комплексов, в которых разные выборки испытуемых подвергнуты влиянию разных условий, – однофакторный дисперсионный анализ для независимых выборок;

- для дисперсионных комплексов, представляющих данные одной и той же

выборки, подвергнутой влиянию разных условий, – однофакторный дисперсионный анализ для независимых выборок.

3.1. Однофакторный дисперсионный анализ для независимых выборок

Назначение. Используется для анализа изменения результативного признака в разных выборках под влиянием разных градаций какого-либо фактора.

Описание. Полученные данные представляют в виде столбцов индивидуальных значений по каждой из градаций фактора. Затем индивидуальные значения суммируют по столбцам и суммы возводят в квадрат. Суть метода состоит в сопоставлении просуммированных по всем условиям квадратов сумм с суммой квадратов всех значений, полученных в исследовании.

Ограничения:

1) имеются не менее трех градаций фактора и не менее двух испытуемых в каждой из градаций. Если градаций фактора всего две, проще использовать другие критерии;

2) соблюдается равенство дисперсий в каждой ячейке комплекса. Для этого производится его уравнивание – выравнивание количества наблюдений в каждой ячейке комплекса;

3) результативный признак нормально распределен (это требование не является жестким).

Гипотезы:

H_0 : различия между градациями фактора являются не более выраженными, чем случайные различия внутри каждой группы.

H_1 : различия между градациями фактора являются более выраженными, чем случайные различия внутри каждой группы.

Для применения однофакторного дисперсионного анализа для независимых выборок необходимо предварительно установить следующие величины:

- c – количество условий (градаций фактора);
- n – количество испытуемых в каждом из условий;
- N – общее количество индивидуальных значений, $N = c \cdot n$;
- T_c – суммы индивидуальных значений по каждому из условий (столбцов);
- ΣT_c^2 – сумма квадратов суммарных значений по каждому из условий;
- x_i – каждое индивидуальное значение;
- Σx_i^2 – сумма квадратов индивидуальных значений;
- $\frac{(\Sigma x_i)^2}{N}$ – квадрат общей суммы индивидуальных значений;
- $\frac{(\Sigma x_i)^2}{N}$ – постоянная величина.

При проведении дисперсионного анализа используются следующие обозначения:

- SS сокращение от «суммы квадратов» (sum of squares), $SS_{факт}$ – вариативность признака, обусловленная действием фактора; $SS_{общ}$ – общая вариативность признака; $SS_{сл}$ – вариативность признака, обусловленная неучтенными, случайными факторами;

- MS – «средний квадрат», усредненная величина соответствующих вари-

тивностей SS ;

- df – число степеней свободы.

Алгоритм:

1. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием фактора:

$$SS_{\text{факт}} = \frac{\sum T_c^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{N}.$$

2. Подсчитать общую вариативность признака: $SS_{\text{общ}} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{N}.$

3. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием случайных факторов: $SS_{\text{сл}} = SS_{\text{общ}} - SS_{\text{факт}}.$

4. Определить число степеней свободы для каждой из вариативностей:

$$df_{\text{факт}} = c - 1; df_{\text{общ}} = N - 1; df_{\text{сл}} = df_{\text{общ}} - df_{\text{факт}}.$$

5. Подсчитать усредненную величину каждой вариативности:

$$MS_{\text{факт}} = SS_{\text{факт}} / df_{\text{факт}}; MS_{\text{сл}} = SS_{\text{сл}} / df_{\text{сл}}.$$

6. Вычислить эмпирическое значение F -критерия Фишера:

$$F_{\text{эмп}} = MS_{\text{факт}} / MS_{\text{сл}}.$$

7. Определить критические значения критерия по таблице Приложения 23 для числа степеней свободы $df_{\text{факт}}$ и $df_{\text{сл}}$.

8. Сопоставить эмпирическое и критическое значение критерия.

Если $F_{\text{эмп}} \geq F_{\text{кр}}$, то H_0 отклоняется. Если $F_{\text{эмп}} < F_{\text{кр}}$, то H_0 принимается. Чем больше $F_{\text{эмп}}$, тем в большей степени вариативность признака обусловлена действием фактора.

9. Произвести оценку силы факторного эффекта [9]:

$\eta_{\text{факт}} = SS_{\text{факт}} / SS_{\text{общ}} \times 100\%$ – показывает, какой процент различий объясняется действием фактора;

$\eta_{\text{сл}} = SS_{\text{сл}} / SS_{\text{общ}} \times 100\%$ – показывает, какой процент различий объясняется действием случайных величин.

10. Установить направление изменений. Для этого данные представить графически, откладывая по оси абсцисс градации фактора, а по оси ординат – средние значения результативного признака.

Пример 1 [27]. Трем различным группам из шести испытуемых предъявляли десять слов с различной скоростью: первой группе – с низкой (1 слово в 5 с), второй группе – со средней (1 слово в 2 с), третьей группе – с высокой (1 слово в 1 с). Зависит ли количество воспроизведенных слов от скорости их предъявления? Количество воспроизведенных слов и промежуточные расчеты представлены в таблице:

№ п.п.	Группа 1 (низкая скорость)	Группа 2 (средняя скорость)	Группа 3 (высокая скорость)
1	8	7	4
2	7	8	5
3	9	5	3
4	5	4	6
5	6	6	2
6	8	7	4
Сумма по условию (T_c)	43	37	24

Среднее по условию (\bar{x})	7,17	6,17	4,00
Общая сумма ($\sum x_i$)	43 + 37 + 24 = 104		

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

H_0 : различия в объеме воспроизведенных слов между группами являются не более выраженными, чем случайные различия внутри каждой группы.

H_1 : различия в объеме воспроизведенных слов между группами являются более выраженными, чем случайные различия внутри каждой группы.

В соответствии с условием количество градаций фактора $c = 3$; количество испытуемых в каждой градации $n = 6$; общее количество индивидуальных значений $N = c \cdot n = 3 \cdot 6 = 18$.

Воспользуемся алгоритмом для однофакторного дисперсионного анализа в случае независимых выборок.

Вычислим вариативность признака, обусловленную действием фактора:

$$SS_{\text{факт}} = \sum T_c^2 / n - (\sum x_i)^2 / N = (43^2 + 37^2 + 24^2) / 6 - (104)^2 / 18 = (1849 + 1369 + 576) / 6 - 10816 / 18 = 3794 / 6 - 10816 / 18 = 632,33 - 600,89 = 31,44.$$

Подсчитаем общую вариативность признака:

$$SS_{\text{общ}} = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / N = 8^2 + 7^2 + 9^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 + 7^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 4^2 + 5^2 + 3^2 + 6^2 + 2^2 + 4^2 - (104)^2 / 18 = 664 - 600,89 = 63,11.$$

Подсчитаем вариативность признака, обусловленную действием случайных факторов:

$$SS_{\text{сл}} = SS_{\text{общ}} - SS_{\text{факт}} = 63,11 - 31,44 = 31,67.$$

Определим число степеней свободы для каждой из вариативностей:

$$df_{\text{факт}} = c - 1 = 3 - 1 = 2; df_{\text{общ}} = N - 1 = 18 - 1 = 17; df_{\text{сл}} = df_{\text{общ}} - df_{\text{факт}} = 17 - 2 = 15.$$

Подсчитаем усредненную величину каждой вариативности:

$$MS_{\text{факт}} = SS_{\text{факт}} / df_{\text{факт}} = 31,44 / 2 = 15,72;$$

$$MS_{\text{сл}} = SS_{\text{сл}} / df_{\text{сл}} = 31,67 / 15 = 2,11.$$

Вычислим эмпирическое значение F -критерия Фишера:

$$F_{\text{эмп}} = MS_{\text{факт}} / MS_{\text{сл}} = 15,72 / 2,11 = 7,45.$$

Определим критические значения критерия по таблице Приложения 23 для числа степеней свободы $df_{\text{факт}} = 2$ и $df_{\text{сл}} = 15$:

$$F_{\text{кр}}(2,15) = \begin{cases} 3,68, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 6,36, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Сопоставим эмпирическое и критические значения критерия.

Поскольку $F_{\text{эмп}} > F_{\text{кр}}$ при $p \leq 0,01$, то H_0 отклоняется, принимается H_1 : различия в объеме воспроизведенных слов между группами являются более выраженными, чем случайные различия внутри каждой группы.

Оценим силу факторного эффекта:

$$\eta_{\text{факт}}^2 = SS_{\text{факт}} / SS_{\text{общ}} \times 100\% = 31,44 / 63,11 \times 100\% = 49,82\%;$$

$$\eta_{\text{сл}}^2 = SS_{\text{сл}} / SS_{\text{общ}} \times 100\% = 31,67 / 63,11 \times 100\% = 50,18\%,$$

т.е. примерно 50% различий в количестве воспроизводимых слов объясняется действием исследуемого фактора (скорость предъявления слов), а остальные 50% – действием случайных величин.

Установим направление изменений. Для этого представим данные графически, откладывая по оси абсцисс градации фактора, а по оси ординат – средние значения результативного признака [27, с. 236]:



Рис. 14.1 График изменения объема воспроизводимых слов при повышении скорости их предъявления (по каждому условию представлены диапазоны изменения признака)

Как следует из графика, при увеличении скорости предъявления слов количество воспроизводимых испытуемыми слов уменьшается.

3.2. Однофакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок

Назначение. Используется в тех случаях, когда изучается влияние разных условий на одну и ту же выборку.

Описание. Различия между испытуемыми могут выступать как самостоятельный источник различий. В однофакторном дисперсионном анализе для независимых выборок различия между условиями в то же время отражали различия между испытуемыми. В случае зависимых выборок различия между условиями могут проявиться только вопреки различиям между испытуемыми. Фактор индивидуальных различий может оказаться более значимым, чем фактор изменения условий. Поэтому необходимо учитывать еще одну величину – сумму квадратов сумм индивидуальных значений испытуемых.

Ограничения.

1) фактор имеет не менее трех градаций, в каждой градации не менее двух испытуемых;

2) дисперсионный комплекс уравновешен;

3) результативный признак нормально распределен.

Для данного вида дисперсионного анализа формулируется *два комплекта гипотез*.

Комплект 1:

H_{0A} : различия между градациями фактора являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

H_{1A} : различия между градациями фактора являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Комплект 2:

$H_{0И}$: индивидуальные различия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

$H_{1И}$: индивидуальные различия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Для применения однофакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок необходимо предварительно определить следующие величины:

- c – количество условий (градаций фактора);
- n – количество испытуемых в каждом из условий;
- N – общее количество индивидуальных значений, $N = c \cdot n$;
- T_c – суммы индивидуальных значений по каждому из условий (столбцов);
- ΣT_c^2 – сумма квадратов суммарных значений по каждому из условий;
- T_u – суммы индивидуальных значений по каждому испытуемому;
- ΣT_u^2 – сумма квадратов сумм индивидуальных значений по испытуемым;
- x_i – каждое индивидуальное значение;
- Σx_i^2 – сумма квадратов индивидуальных значений;
- $\frac{(\Sigma x_i)^2}{N}$ – квадрат общей суммы индивидуальных значений;
- $\frac{(\Sigma x_i)^2}{N}$ – постоянная величина.

Алгоритм:

1. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием фактора:

$$SS_{\text{факт}} = \frac{\Sigma T_c^2}{n} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N}.$$

2. Подсчитать вариативность признака, обусловленную фактором индивидуальных различий между испытуемыми: $SS_{\text{исп}} = \frac{\Sigma T_u^2}{c} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N}.$

3. Подсчитать общую вариативность признака: $SS_{\text{общ}} = \Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N}.$

4. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием случайных факторов: $SS_{\text{сл}} = SS_{\text{общ}} - SS_{\text{факт}} - SS_{\text{исп}}.$

5. Определить число степеней свободы для каждой из вариативностей:

$$df_{\text{факт}} = c - 1; df_{\text{исп}} = n - 1; df_{\text{общ}} = N - 1; df_{\text{сл}} = df_{\text{общ}} - df_{\text{факт}} - df_{\text{исп}}.$$

6. Подсчитать усредненную величину каждой вариативности:

$$MS_{\text{факт}} = SS_{\text{факт}} / df_{\text{факт}}; MS_{\text{исп}} = SS_{\text{исп}} / df_{\text{исп}}; MS_{\text{сл}} = SS_{\text{сл}} / df_{\text{сл}}.$$

7. Вычислить эмпирическое значение F -критерия Фишера для исследуемого фактора и фактора индивидуальных различий, определяя число степеней свободы по числителю и знаменателю:

$$F_{\text{факт}} = MS_{\text{факт}} / MS_{\text{сл}}; F_{\text{исп}} = MS_{\text{исп}} / MS_{\text{сл}}.$$

8. Определить критические значения F -критерия Фишера для исследуемого фактора и фактора индивидуальных различий по таблице Приложения 23 для соответствующего числа степеней свободы (df_1 определяют по числителю, df_2 – по знаменателю).

9. Сопоставить эмпирическое и критическое значение критерия.

Если $F_{\text{факт}} \geq F_{\text{кр}}$, то H_{0A} отклоняется. Если $F_{\text{факт}} < F_{\text{кр}}$, то H_{0A} принимается.

Если $F_{\text{исп}} \geq F_{\text{кр}}$, то $H_{0И}$ отклоняется. Если $F_{\text{исп}} < F_{\text{кр}}$, то $H_{0И}$ принимается.

10. Произвести оценку силы факторного эффекта [9]:

$\eta_{\text{факт}} = SS_{\text{факт}} / SS_{\text{общ}} \times 100\%$ – показывает, какой процент различий объясняет-

ся действием фактора;

$\eta_{исп} = SS_{исп} / SS_{общ} \times 100\%$ – показывает, какой процент различий объясняется фактором индивидуальных различий;

$\eta_{сл} = SS_{сл} / SS_{общ} \times 100\%$ – показывает, какой процент различий объясняется действием случайных величин.

11. Установить направление изменений. Для этого данные нужно представить графически, откладывая по оси абсцисс градации фактора, а по оси ординат – средние значения результивного признака.

Пример 2 [27]. Группа из пяти испытуемых была обследована с помощью трех экспериментальных заданий, направленных на изучение интеллектуальной настойчивости. Каждому испытуемому последовательно предъявлялись три одинаковые анаграммы: четырехбуквенная, пятибуквенная, шестибуквенная. Можно ли утверждать, что фактор длины анаграммы влияет на длительность попыток ее решения? Длительность попыток решения анаграмм (в секундах) и промежуточные расчеты представлены в таблице:

№ п.п.	Условие 1 (четырёхбуквенная анаграмма)	Условие 2 (пятибуквенная анаграмма)	Условие 3 (шестибуквенная анаграмма)	Сумма по испытуемым (T_{ii})
1	5	235	7	247
2	7	604	20	631
3	2	93	5	100
4	2	171	8	181
5	35	141	7	183
Сумма по условию (T_c)	51	1244	47	Общая сумма ($\sum x_i$): 1342
Среднее по условию (\bar{x})	10,2	248,8	9,4	

Решение. Сформулируем статистические гипотезы:

Комплект 1.

H_{0A} : различия в длительности попыток решения анаграмм разной длины являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

H_{1A} : различия в длительности попыток решения анаграмм разной длины являются более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Комплект 2:

H_{0II} : индивидуальные различия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

H_{1II} : индивидуальные различия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Определим промежуточные величины, необходимые для расчета F -критерия Фишера: количество градаций фактора $c = 3$; количество испытуемых в каждой градации $n = 5$; общее количество индивидуальных значений $N = c \cdot n = 3 \cdot 5 = 15$.

Воспользуемся алгоритмом для однофакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок:

Вычислим вариативность признака, обусловленную действием фактора:

$SS_{факт} = \sum T_c^2 / n - (\sum x_i)^2 / N = (51^2 + 1244^2 + 47^2) / 5 - (1342)^2 / 15 = (2601 + 1547536 + 2209) / 5 - 1800964 / 15 = 1552346 / 5 - 1800964 / 15 = 310469,2 - 120064,3 \approx 190405$.

Подсчитаем вариативность признака, обусловленную фактором индивидуальных различий между испытуемыми:

$$SS_{исп} = \sum T_u^2 / c - (\sum x_i)^2 / N = (247^2 + 631^2 + 100^2 + 181^2 + 183^2) / 3 - (1342)^2 / 15 = (61009 + 398161 + 10000 + 32761 + 33489) / 3 - (1342)^2 / 15 = 535420 / 3 - 120064,3 = 178473,3 - 120064,3 \approx 58409.$$

Подсчитаем общую вариативность признака:

$$SS_{общ} = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / N = 5^2 + 7^2 + 2^2 + 2^2 + 35^2 + 235^2 + 604^2 + 93^2 + 171^2 + 141^2 + 7^2 + 20^2 + 5^2 + 8^2 + 7^2 - (1342)^2 / 15 = 479706 - 120064,3 \approx 359642.$$

Подсчитаем вариативность признака, обусловленную действием случайных факторов:

$$SS_{сл} = SS_{общ} - SS_{факт} - SS_{исп} = 359642 - 190405 - 58409 = 110828.$$

Определим число степеней свободы для каждой из вариативностей:

$$df_{факт} = c - 1 = 3 - 1 = 2; df_{исп} = n - 1 = 5 - 1 = 4; df_{общ} = N - 1 = 15 - 1 = 14;$$

$$df_{сл} = df_{общ} - df_{факт} - df_{исп} = 14 - 2 - 4 = 8.$$

Подсчитаем усредненную величину каждой вариативности:

$$MS_{факт} = SS_{факт} / df_{факт} = 190405 / 2 = 95202,5;$$

$$MS_{исп} = SS_{исп} / df_{исп} = 58409 / 4 = 14602,2;$$

$$MS_{сл} = SS_{сл} / df_{сл} = 110828 / 8 = 13853,4.$$

Вычислим эмпирическое значение F -критерия Фишера:

$$F_{факт} = MS_{факт} / MS_{сл} = 95202,5 / 13853,4 = 6,872.$$

$$F_{исп} = MS_{исп} / MS_{сл} = 14602,2 / 13853,4 = 1,054.$$

Определим критические значения критерия по таблице Приложения 23 для соответствующего числа степеней свободы:

$$F_{кр(2,8)} = \begin{cases} 4,46, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 8,65, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

$$F_{кр(4,8)} = \begin{cases} 3,84, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 7,01, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Сопоставим эмпирическое и критические значения критерия.

Поскольку $F_{факт} > F_{кр}$ при $p \leq 0,05$, то H_{0A} отклоняется, принимается H_{1A} : в длительности попыток решения анаграмм разной длины являются более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

$F_{исп} < F_{кр}$ при $p \leq 0,05$, то $H_{0и}$ принимается: индивидуальные различия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Оценим силу факторного эффекта:

$$\eta_{факт} = SS_{факт} / SS_{общ} \times 100\% = 190405 / 359642 \cdot 100\% = 52,94\%;$$

$$\eta_{исп} = SS_{исп} / SS_{общ} \times 100\% = 58409 / 359642 \cdot 100\% = 16,24\%;$$

$$\eta_{сл} = SS_{сл} / SS_{общ} \times 100\% = 110828 / 359642 \cdot 100\% = 30,82\%,$$

т.е. около 53% различий во времени решения анаграмм объясняется действием исследуемого фактора, более 16% – индивидуальными различиями испытуемых и более 30% – действием случайных величин.

Для установления направления изменений представим данные графически, откладывая по оси абсцисс градации фактора, а по оси ординат – средние значения результативного признака [27, с. 241]:

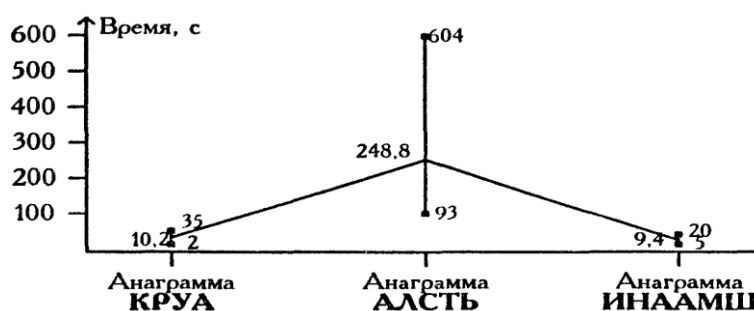


Рис. 14.2. График изменения времени работы над разными анаграммами у пяти испытуемых (по каждой анаграмме представлены диапазоны изменения признака)

Как следует из графика, наблюдается тенденция увеличения времени решения при переходе от четырехбуквенной к шестибуквенной, а затем к пятибуквенной анаграмме. Это означает, что при решении анаграммы более значимым является не фактор длины анаграммы, а ее качественная характеристика.

Решение задач однофакторного дисперсионного анализа удобно осуществлять с помощью статистических пакетов [10, с. 172–176].

4. Двухфакторный дисперсионный анализ [27]

Двухфакторный дисперсионный анализ позволяет оценить не только влияние каждого из двух факторов по отдельности, но и их взаимодействие. Часто встречаются случаи, когда действие каждого фактора в отдельности незначимо, а значимо их взаимодействие. Один фактор может усиливать или ослаблять действие другого. Например, ужесточение наказания может снижать количество агрессивных реакций у девочек и повышать его у мальчиков. Поэтому установление значимого взаимодействия факторов зачастую важнее, чем действие каждого из факторов в отдельности.

4.1 Двухфакторный дисперсионный анализ для независимых выборок

Назначение. Используется в тех случаях, когда изучается одновременное действие двух факторов на разные выборки испытуемых.

Описание. Суть метода та же, что и у однофакторного дисперсионного анализа, но расчеты гораздо сложнее, поскольку проверяется большее количество гипотез.

Ограничения.

- 1) каждый фактор должен иметь не менее двух градаций;
- 2) в каждой ячейке комплекса должно быть не менее двух значений;
- 3) дисперсионный комплекс должен быть симметричным, т.е. каждой градации фактора *A* должно соответствовать одинаковое количество градаций фактора *B*;
- 4) дисперсионный комплекс должен быть уравновешен;
- 5) результативный признак должен быть нормально распределен в исследуемой выборке;
- 6) факторы должны быть независимыми, что подтверждается отсутствием корреляционной связи между ними.

Для данного вида дисперсионного анализа формулируется *три комплекта гипотез*.

Комплект 1 (гипотезы по фактору A):

H_{0A} : различия в уровне исследуемого признака, обусловленные действием фактора A , являются не более выраженными, чем случайные различия между показателями.

H_{1A} : различия в уровне исследуемого признака, обусловленные действием фактора A , являются более выраженными, чем случайные различия между показателями.

Комплект 2 (гипотезы по фактору B):

H_{0B} : различия в уровне исследуемого признака, обусловленные действием фактора B , являются не более выраженными, чем случайные различия между показателями.

H_{1B} : различия в уровне исследуемого признака, обусловленные действием фактора B , являются более выраженными, чем случайные различия между показателями.

Комплект 3 (гипотезы по взаимодействию факторов A и B):

H_{0AB} : влияние фактора A на уровень исследуемого признака одинаково при разных градациях фактора B и наоборот.

H_{1AB} : влияние фактора A на уровень исследуемого признака не одинаково при разных градациях фактора B и наоборот.

Для применения двухфакторного дисперсионного анализа в случае независимых выборок необходимо предварительно установить следующие величины:

- a – количество градаций фактора A ;
- b – количество градаций фактора B ;
- n – количество испытуемых в каждом из условий;
- N – общее количество индивидуальных значений;
- T_A – суммы по градациям фактора A ;
- $\sum T_A^2$ – сумма квадратов этих сумм;
- T_B – суммы по градациям фактора B ;
- $\sum T_B^2$ – сумма квадратов этих сумм;
- T_u – суммы индивидуальных значений по каждому испытуемому;
- $\sum T_u^2$ – сумма квадратов сумм индивидуальных значений по испытуемым;
- x_i – каждое индивидуальное значение;
- $\sum x_i^2$ – сумма квадратов индивидуальных значений;
- $\frac{(\sum x_i)^2}{N}$ – квадрат общей суммы индивидуальных значений;
- $\frac{\sum T_u^2}{N}$ – постоянная величина.

Алгоритм:

1. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием фактора A :

$$SS_A = \frac{\sum T_A^2}{nb} - \frac{(\sum x_i)^2}{N}.$$

2. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием фактора B :

$$SS_B = \frac{\sum T_B^2}{na} - \frac{(\sum x_i)^2}{N}.$$

3. Подсчитать вариативность признака, обусловленную взаимодействием факторов A и B :

$$SS_{AB} = \frac{\sum T_{AB}^2}{n} - \frac{(\sum x_i)^2}{N} - SS_A - SS_B.$$

4. Подсчитать общую вариативность признака:

$$SS_{общ} = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{N}.$$

5. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием случайных факторов: $SS_{сл} = SS_{общ} - SS_A - SS_B - SS_{AB}$.

6. Определить число степеней свободы для каждой из вариативностей:

$$df_A = a - 1; df_B = b - 1; df_{AB} = df_A \cdot df_B = (a - 1) \cdot (b - 1); df_{общ} = N - 1;$$

$$df_{сл} = df_{общ} - df_A - df_B - df_{AB}.$$

7. Подсчитать усредненную величину каждой вариативности:

$$MS_A = SS_A / df_A; MS_B = SS_B / df_B; MS_{AB} = SS_{AB} / df_{AB}; MS_{сл} = SS_{сл} / df_{сл}.$$

8. Вычислить эмпирическое значение F -критерия Фишера для каждого из факторов и для их взаимодействия:

$$F_A = MS_A / MS_{сл}; F_B = MS_B / MS_{сл}; F_{AB} = MS_{AB} / MS_{сл}.$$

9. Определить критические значения критерия по таблице Приложения 23 для соответствующего числа степеней свободы (df_1 определяется по числителю и df_2 – по знаменателю) для каждого из факторов и для их взаимодействия.

10. Сопоставить эмпирическое и критическое значение критерия.

Если $F_A \geq F_{кр}$, то H_{0A} отклоняется. Если $F_A < F_{кр}$, то H_{0A} принимается.

Если $F_B \geq F_{кр}$, то H_{0B} отклоняется. Если $F_B < F_{кр}$, то H_{0B} принимается.

Если $F_{AB} \geq F_{кр}$, то H_{0AB} отклоняется. Если $F_{AB} < F_{кр}$, то H_{0AB} принимается.

11. Произвести оценку силы факторного эффекта [9]:

$\eta_{факт} = SS_A / SS_{общ} \times 100\%$ показывает, какой процент различий объясняется действием фактора A . Аналогично вычисляется сила факторного эффекта для фактора B и для взаимодействия факторов A и B ;

$\eta_{сл} = SS_{сл} / SS_{общ} \times 100\%$ показывает, какой процент различий объясняется действием случайных величин.

12. Установить направление изменений. Для этого данные представляют графически, откладывая по оси абсцисс градации фактора B , а по оси ординат – средние значения результивного признака при разных градациях фактора A .

Пример 3 [27]. Четырем группам, в каждой из которых было по четыре испытуемых, с разной скоростью предъявлялись списки из десяти слов разной длины: группе 1 – короткие слова с большой скоростью; группе 2 – короткие слова с медленной скоростью; группе 3 – длинные слова с большой скоростью; группе 4 – длинные слова с медленной скоростью. Можно ли утверждать, что количество воспроизводимых испытуемыми слов зависит от длины слов и скорости их предъявления? Количество воспроизведенных слов и промежуточные расчеты представлены в таблице:

Скорость предъявления слов:	Длина слов:		Сумма T_B
	короткие	длинные	
большая	9	5	
	8	3	
	6	3	
	7	4	
Сумма	30	15	45
Среднее \bar{x}	7,5	3,75	
малая	4	7	
	3	5	
	3	6	
	5	7	
Сумма	15	25	40
Среднее \bar{x}	3,75	6,25	
Сумма T_A	$30 + 15 = 45$	$15 + 25 = 40$	Общая сумма ($\sum x_i$): 85

Решение. Пусть фактор A – длина предъявляемых слов, фактор B – скорость предъявления слов. Сформулируем статистические гипотезы:

Гипотезы по фактору A :

H_{0A} : различия в количестве воспроизводимых испытуемыми слов, обусловленные длиной слов, являются не более выраженными, чем случайные различия.

H_{1A} : различия в количестве воспроизводимых испытуемыми слов, обусловленные длиной слов, являются более выраженными, чем случайные различия.

Гипотезы по фактору B :

H_{0B} : различия в количестве воспроизводимых испытуемыми слов, обусловленные скоростью их предъявления, являются не более выраженными, чем случайные различия.

H_{1B} : различия в количестве воспроизводимых испытуемыми слов, обусловленные скоростью их предъявления, являются не более выраженными, чем случайные различия.

Гипотезы по взаимодействию факторов A и B :

H_{0AB} : влияние длины предъявляемых слов на количество воспроизведенных испытуемыми слов одинаково при разной скорости их предъявления и наоборот, влияние скорости предъявления слов на количество воспроизведенных испытуемыми слов одинаково при предъявлении слов разной длины.

H_{1AB} : влияние длины предъявляемых слов на количество воспроизведенных испытуемыми слов не одинаково при разной скорости их предъявления и наоборот, влияние скорости предъявления слов на количество воспроизведенных испытуемыми слов не одинаково при предъявлении слов разной длины.

Определим промежуточные величины, необходимые для расчета F -критерия Фишера: количество градаций фактора A и фактора B : $a = 2$, $b = 2$; количество испытуемых в каждой градации $n = 4$; общее количество индивидуальных значений $N = 16$.

Воспользуемся алгоритмом для двухфакторного дисперсионного анализа для независимых выборок.

Вычислим вариативности признака, обусловленные действием каждого фактора, их взаимодействием, а также общую и случайную вариативность признака:

$$SS_A = \sum T_A^2 / nb - (\sum x_i)^2 / N = (45^2 + 40^2) / 4 \cdot 2 - 85^2 / 16 = 3625 / 8 - 7225 / 16 = 453,13 - 451,57 = 1,56;$$

$$SS_B = \sum T_B^2 / na - (\sum x_i)^2 / N = (45^2 + 40^2) / 4 \cdot 2 - 85^2 / 16 = 3625 / 8 - 7225 / 16 = 453,13 - 451,57 = 1,56;$$

$$SS_{AB} = \sum T_{AB}^2 / n - (\sum x_i)^2 / N - SS_A - SS_B = (30^2 + 15^2 + 15^2 + 25^2) / 4 - 85^2 / 16 - 1,56 - 1,56 = 1975 / 4 - 451,57 - 3,12 = 493,75 - 451,57 - 3,12 = 39,06;$$

$$SS_{общ} = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / N = (9^2 + 8^2 + 6^2 + 7^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) - 7225/16 = 507 - 451,57 = 55,43;$$

$$SS_{сл} = SS_{общ} - SS_A - SS_B - SS_{AB} = 55,43 - 1,56 - 1,56 - 39,06 = 13,25.$$

Определим число степеней свободы для каждой из вариативностей:

$$df_A = a - 1 = 2 - 1 = 1; df_B = b - 1 = 2 - 1 = 1; df_{AB} = df_A \cdot df_B = 1 \cdot 1 = 1;$$

$$df_{общ} = N - 1 = 16 - 1 = 15; df_{сл} = df_{общ} - df_A - df_B - df_{AB} = 15 - 1 - 1 - 1 = 12.$$

Подсчитаем усредненную величину каждой вариативности:

$$MS_A = SS_A / df_A = 1,56 / 1 = 1,56; MS_B = SS_B / df_B = 1,56 / 1 = 1,56;$$

$$MS_{AB} = SS_{AB} / df_{AB} = 39,06 / 1 = 39,06; MS_{сл} = SS_{сл} / df_{сл} = 13,25 / 12 = 1,104.$$

Вычислим эмпирическое значение F -критерия Фишера для каждого из факторов и для их взаимодействия:

$$F_A = MS_A / MS_{сл} = 1,56 / 1,104 = 1,41;$$

$$F_B = MS_B / MS_{сл} = 1,56 / 1,104 = 1,41;$$

$$F_{AB} = MS_{AB} / MS_{сл} = 39,06 / 1,104 = 35,38.$$

Определим критические значения критерия по таблице Приложения 23 для соответствующего числа степеней свободы (df_1 определяется по числителю и df_2 – по знаменателю) для каждого из факторов и для их взаимодействия. В нашем случае для всех трех соотношений $df_1 = 1$, а $df_2 = 12$. Тогда

$$F_{кр(1,12)} = \begin{cases} 4,75, & \text{при } p \leq 0,05; \\ 9,33, & \text{при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Сопоставим эмпирическое и критические значения критерия.

Поскольку $F_A < F_{кр}$, то H_{0A} принимается, т.е. различия в количестве воспроизводимых испытуемыми слов, обусловленные длиной слов, являются случайными.

Также $F_B < F_{кр}$ и H_{0B} принимается: различия в количестве воспроизводимых испытуемыми слов, обусловленные скоростью их предъявления, являются случайными.

Однако $F_{AB} \geq F_{кр}$ при $p \leq 0,01$. Следовательно H_{0AB} отклоняется, принимается H_{1AB} .

Произведем оценку силы факторного эффекта:

$$\eta_A = SS_A / SS_{общ} \cdot 100\% = 1,56 / 55,43 \times 100\% = 2,8\%;$$

$$\eta_B = SS_B / SS_{общ} \cdot 100\% = 1,56 / 55,43 \times 100\% = 2,8\%;$$

$$\eta_{AB} = SS_{AB} / SS_{общ} \cdot 100\% = 39,06 / 55,43 \times 100\% = 70,5\%;$$

$$\eta_{сл} = SS_{сл} / SS_{общ} \cdot 100\% = 13,25 / 55,43 \times 100\% = 23,9\%.$$

Таким образом, основной вклад в вариативность признака вносит взаимодействие факторов. Для того чтобы оценить его влияние на количество воспроизводимых слов, представим данные графически [27, с. 252]:

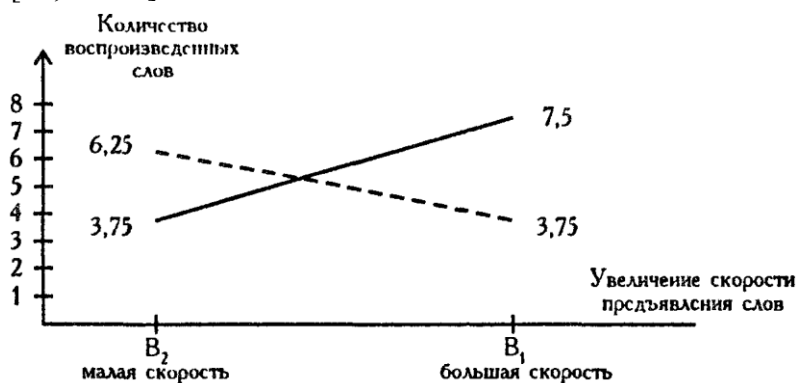


Рис. 14.3. Графики изменения объема воспроизводимых слов при повышении скорости предъявления коротких слов (сплошная линия) и длинных слов (пунктирная линия)

Как следует из графика, короткие слова (представлены сплошной линией) лучше запоминаются при большой скорости предъявления, а длинные (представлены пунктирной линией) – при малой скорости.

4.2. Двухфакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок

Назначение. Используется в тех случаях, когда изучается действие двух факторов на одну и ту же выборку испытуемых.

Описание. Позволяет определить тенденцию изменения признака под влиянием двух факторов одновременно.

Ограничения такие же, как и в модели для независимых выборок, но с одним уточнением: каждый испытуемый должен пройти все сочетания градаций двух факторов. Этим достигается равномерность комплекса.

Для данного вида дисперсионного анализа формулируется *четыре комплекта гипотез*.

Комплект 1 (гипотезы по фактору A):

H_{0A} : различия в уровне исследуемого признака, обусловленные действием фактора A , являются не более выраженными, чем случайные различия между показателями.

H_{1A} : различия в уровне исследуемого признака, обусловленные действием фактора A , являются более выраженными, чем случайные различия между показателями.

Комплект 2 (гипотезы по фактору B):

H_{0B} : различия в уровне исследуемого признака, обусловленные действием фактора B , являются не более выраженными, чем случайные различия между показателями.

H_{1B} : различия в уровне исследуемого признака, обусловленные действием фактора B , являются более выраженными, чем случайные различия между показателями.

Комплект 3 (гипотезы по взаимодействию факторов A и B):

H_{0AB} : влияние фактора A на уровень исследуемого признака одинаково при разных градациях фактора B и наоборот.

H_{1AB} : влияние фактора A на уровень исследуемого признака не одинаково при разных градациях фактора B и наоборот.

Комплект 4 (гипотезы по фактору индивидуальных различий):

H_{0II} : индивидуальные различия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

H_{1II} : индивидуальные различия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Для применения двухфакторного дисперсионного анализа в случае зависимых выборок предварительно устанавливают следующие величины:

- a – количество градаций фактора A ;
- b – количество градаций фактора B ;
- n – количество испытуемых в каждой из градаций;
- N – общее количество индивидуальных значений;
- T_A – суммы по градациям фактора A ;
- ΣT_A^2 – сумма квадратов этих сумм;
- T_B – суммы по градациям фактора B ;
- ΣT_B^2 – сумма квадратов этих сумм;

- T_u – суммы индивидуальных значений по каждому испытуемому;
- ΣT_u^2 – сумма квадратов сумм индивидуальных значений по испытуемым;
- ΣT_{AB}^2 – сумма квадратов сумм по ячейкам;
- ΣT_{AI}^2 – сумма квадратов индивидуальных сумм по градациям фактора A ;
- ΣT_{BI}^2 – сумма квадратов индивидуальных сумм по градациям фактора B ;
- x_i – каждое индивидуальное значение;
- Σx_i^2 – сумма квадратов индивидуальных значений;
- $\frac{(\Sigma x_i)^2}{N}$ – квадрат общей суммы индивидуальных значений;
- $\frac{(\Sigma x_i)^2}{N}$ – постоянная величина.

Алгоритм:

1. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием фактора A :

$$SS_A = \frac{\Sigma T_A^2}{nb} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N}.$$

2. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием фактора B :

$$SS_B = \frac{\Sigma T_B^2}{na} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N}.$$

3. Подсчитать вариативность признака, обусловленную взаимодействием факторов A и B :

$$SS_{AB} = \frac{\Sigma T_{AB}^2}{n} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N} - SS_A - SS_B.$$

4. Подсчитать вариативность признака, обусловленную действием фактора индивидуальных различий: $SS_I = \frac{\Sigma T_I^2}{ab} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N}.$

5. Подсчитать вариативность признака, обусловленную взаимодействием фактора A и фактора индивидуальных различий:

$$SS_{AI} = \frac{\Sigma T_{AI}^2}{b} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N} - SS_A - SS_I.$$

6. Подсчитать вариативность признака, обусловленную взаимодействием фактора B и фактора индивидуальных различий:

$$SS_{BI} = \frac{\Sigma T_{BI}^2}{a} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N} - SS_B - SS_I.$$

7. Подсчитать общую вариативность признака: $SS_{общ} = \Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{N}.$

8. Подсчитать вариативность признака, обусловленную взаимодействием трех факторов: $SS_{ABII} = SS_{общ} - SS_A - SS_B - SS_I - SS_{AB} - SS_{AI} - SS_{BI}.$

9. Определить число степеней свободы для каждой из вариативностей:

$$df_A = a - 1; df_B = b - 1; df_I = n - 1;$$

$$df_{AB} = df_A \cdot df_B; df_{AI} = df_A \cdot df_I; df_{BI} = df_B \cdot df_I; df_{ABII} = df_A \cdot df_B \cdot df_I; df_{общ} = N - 1.$$

10. Подсчитать усредненную величину каждой вариативности:

$$MS_A = SS_A / df_A; MS_B = SS_B / df_B; MS_{AB} = SS_{AB} / df_{AB}; MS_I = SS_I / df_I;$$

$$MS_{AI} = SS_{AI} / df_{AI}; MS_{BI} = SS_{BI} / df_{BI}; MS_{ABII} = SS_{ABII} / df_{ABII}.$$

11. Вычислить эмпирическое значение F -критерия Фишера для каждого из факторов и для их взаимодействия:

$$F_A = MS_A / MS_{AII}; F_B = MS_B / MS_{BII}; F_{II} = MS_{II} / MS_{ABII}; F_{AB} = MS_{AB} / MS_{ABII}.$$

12. Определить критические значения критерия по таблице Приложения 23 для соответствующего числа степеней свободы (df_1 определяется по числителю и df_2 – по знаменателю) для каждого из факторов и для их взаимодействия.

13. Сопоставить эмпирическое и критическое значения критерия.

Если $F_A \geq F_{кр}$, то H_{0A} отклоняется. Если $F_A < F_{кр}$, то H_{0A} принимается.

Если $F_B \geq F_{кр}$, то H_{0B} отклоняется. Если $F_B < F_{кр}$, то H_{0B} принимается.

Если $F_{AB} \geq F_{кр}$, то H_{0AB} отклоняется. Если $F_{AB} < F_{кр}$, то H_{0AB} принимается.

Если $F_{II} \geq F_{кр}$, то H_{0II} отклоняется. Если $F_{II} < F_{кр}$, то H_{0II} принимается.

14. Произвести оценку силы факторного эффекта [9]:

$\eta_{факт} = SS_A / SS_{общ} \times 100\%$ – показывает, какой процент различий объясняется действием фактора A . Аналогично вычисляется сила факторного эффекта для фактора B , для взаимодействия факторов A и B , для фактора индивидуальных различий.

15. Установить направление изменений. Для этого данные нужно представить в виде двух графиков, откладывая по оси абсцисс градации одного фактора, а по оси ординат – средние значения результативного признака при разных градациях другого фактора.

Пример 4 [27]. В выборке курсантов военного училища измерялась способность к удержанию физического волевого усилия на динамометре. Испытуемым предлагалось выдерживать на динамометре мышечное усилие левой и правой рукой, равное 1/2 максимальной мышечной силы данной руки, вначале наедине с экспериментатором, а затем в парном соревновании в присутствии группы сокурсников. Можно ли утверждать, что правая рука более «социальна»? Подтверждается ли предположение о том, что условия проведения исследования (наедине с экспериментатором – в присутствии группы) влияют на продолжительность удержания волевого усилия? Длительность удержания усилия (с/10) и промежуточные расчеты представлены в таблице:

Условия проведения исследования:	Рука:				Сумма T_B
	№ п.п.	правая	№ п.п.	левая	
вне группы	1	11	1	10	21
	2	13	2	11	24
	3	12	3	8	20
	4	9	4	10	19
Сумма	45		39		84
Среднее \bar{x}	11,25		9,75		
в группе	1	15	1	10	25
	2	14	2	10	24
	3	8	3	5	13
	4	7	4	8	15
Сумма	44		33		77
Среднее \bar{x}	11,00		8,25		Общая сумма (Σx_i):161
Сумма T_A	26+27+20+16= 89		20+21+13+18=72		

Решение. Пусть фактор A – рука, удерживающая физическое волевое усилие; фактор B – условия проведения исследования. Сформулируем статистические гипотезы:

Комплект 1 (гипотезы по фактору A):

H_{0A} : различия в продолжительности удержания физического волевого усилия, обусловленные выбором руки, являются не более выраженными, чем случайные различия между показателями.

H_{1A} : различия в продолжительности удержания физического волевого усилия, обусловленные выбором руки, являются более выраженными, чем случайные различия между показателями.

Комплект 2 (гипотезы по фактору B):

H_{0B} : различия в продолжительности удержания физического волевого усилия, обусловленные условиями проведения эксперимента, являются не более выраженными, чем случайные различия между показателями.

H_{1B} : различия в продолжительности удержания физического волевого усилия, обусловленные условиями проведения эксперимента, являются более выраженными, чем случайные различия между показателями.

Комплект 3 (гипотезы по взаимодействию факторов A и B):

H_{0AB} : влияние выбора руки (левой или правой) на продолжительность удержания физического волевого усилия одинаково при разных условиях проведения эксперимента и наоборот, влияние условий проведения эксперимента на продолжительность удержания физического волевого усилия одинаково для левой и правой руки.

H_{1AB} : влияние выбора руки (левой или правой) на продолжительность удержания физического волевого усилия не одинаково при разных условиях проведения эксперимента и наоборот, влияние условий проведения эксперимента на продолжительность удержания физического волевого усилия не одинаково для левой и правой руки.

Комплект 4 (гипотезы по фактору индивидуальных различий):

$H_{0И}$: различия в продолжительности удержания физического волевого усилия между испытуемыми являются не более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

$H_{1И}$: различия в продолжительности удержания физического волевого усилия между испытуемыми являются более выраженными, чем различия, обусловленные случайными причинами.

Определим промежуточные величины, необходимые для расчета F -критерия Фишера: количество градаций фактора A и фактора B одинаково: $a = 2$, $b = 2$; количество испытуемых в каждой градации $n = 4$; общее количество индивидуальных значений $N = 16$.

Воспользуемся алгоритмом для двухфакторного дисперсионного анализа в случае зависимых выборок:

Вычислим вариативности признака, обусловленные действием каждого фактора, в том числе фактора индивидуальных различий, а также их взаимодействием, и общую вариативность признака:

$$SS_A = \Sigma T_A^2 / nb - (\Sigma x_i)^2 / N = [(45 + 44)^2 + (39 + 33)^2] / 4 \cdot 2 - 161^2 / 16 = (7921 + 5184) / 8 - 1620,06 = 1638,13 - 1620,06 = 18,07;$$

$$SS_B = \Sigma T_B^2 / na - (\Sigma x_i)^2 / N = [(45 + 39)^2 + (44 + 33)^2] / 4 \cdot 2 - 161^2 / 16 = (7056 + 5929) / 8 - 25921 / 16 = 12985,8 - 1620,06 = 1623,13 - 1620,06 = 3,07;$$

$$SS_{AB} = \Sigma T_{AB}^2 / n - (\Sigma x_i)^2 / N - SS_A - SS_B = (45^2 + 39^2 + 44^2 + 33^2) / 4 - 161^2 / 16 - 18,07 - 3,07 = 6571 / 4 - 1620,06 - 21,14 = 1642,75 - 1641,2 = 1,55;$$

$$SS_{И} = \Sigma T_{И}^2 / ab - (\Sigma x_i)^2 / N = [(21 + 25)^2 + (24 + 24)^2 + (20 + 13)^2 + (19 + 15)^2] / 2 \cdot 2 - 161^2 / 16 = (2116 + 2304 + 1089 + 1156) / 4 - 1620,06 = 6665 / 4 - 1620,06 = 1666,25 - 1620,06 = 46,19;$$

$$SS_{ABИ} = \Sigma T_{ABИ}^2 / b - (\Sigma x_i)^2 / N - SS_A - SS_{И} = (26^2 + 27^2 + 20^2 + 16^2 + 20^2 + 21^2 + 13^2 + 18^2) / 2 - 161^2 / 16 - 18,07 - 46,19 = 3395 / 2 - 1620,06 - 64,26 = 1697,5 - 1684,32 = 13,18;$$

$$SS_{BH} = \Sigma T_{BH}^2 / a - (\Sigma x_i)^2 / N - SS_B - SS_H = (21^2 + 24^2 + 20^2 + 19^2 + 25^2 + 24^2 + 13^2 + 15^2) / 2 - 161^2 / 16 - 3,07 - 46,19 = 3373 / 2 - 1620,06 - 49,26 = 1686,5 - 1669,32 = 17,18;$$

$$SS_{общ} = \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2 / N = (11^2 + 13^2 + 12^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2 + 10^2 + 15^2 + 14^2 + 8^2 + 7^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 8^2) - 161^2 / 16 = 1723 - 1620,06 = 102,94;$$

$$SS_{ABH} = SS_{общ} - SS_A - SS_B - SS_H - SS_{AB} - SS_{AH} - SS_{BH} = 102,94 - 18,07 - 3,07 - 46,19 - 1,55 - 13,18 - 17,18 = 3,7.$$

Определим число степеней свободы для каждой из вариативностей:

$$df_A = a - 1 = 2 - 1 = 1; df_B = b - 1 = 2 - 1 = 1; df_{AB} = df_A \cdot df_B = 1 \cdot 1 = 1; df_H = n - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$df_{AH} = df_A \cdot df_H = 1 \cdot 3 = 3; df_{BH} = df_B \cdot df_H = 1 \cdot 3 = 3;$$

$$df_{ABH} = df_A \cdot df_B \cdot df_H = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3; df_{общ} = N - 1 = 16 - 1 = 15.$$

Подсчитаем усредненную величину каждой вариативности:

$$MS_A = SS_A / df_A = 18,07 / 1 = 18,07; MS_B = SS_B / df_B = 3,07 / 1 = 3,07;$$

$$MS_{AB} = SS_{AB} / df_{AB} = 1,55 / 1 = 1,55; MS_H = SS_H / df_H = 46,19 / 3 = 15,40;$$

$$MS_{AH} = SS_{AH} / df_{AH} = 13,18 / 3 = 4,39; MS_{BH} = SS_{BH} / df_{BH} = 17,18 / 3 = 5,73;$$

$$MS_{ABH} = SS_{ABH} / df_{ABH} = 3,7 / 3 = 1,23.$$

Вычислим эмпирическое значение F -критерия Фишера для каждого из факторов и для их взаимодействия:

$$F_A = MS_A / MS_{AH} = 18,07 / 4,39 = 4,15;$$

$$F_B = MS_B / MS_{BH} = 3,07 / 5,73 = 0,53;$$

$$F_H = MS_H / MS_{ABH} = 15,40 / 1,23 = 12,52;$$

$$F_{AB} = MS_{AB} / MS_{ABH} = 1,55 / 1,23 = 1,26.$$

Определим критические значения критерия по таблице Приложения 23 для соответствующего числа степеней свободы (df_1 определяется по числителю и df_2 – по знаменателю) для каждого из факторов и для взаимодействия факторов A и B . В нашем случае для $F_{крA}$, $F_{крB}$ и $F_{крAB}$ $df_1 = 1$, а $df_2 = 3$.

Тогда

$$F_{кр(1,3)} = \begin{cases} 10,13, \text{ при } p \leq 0,05; \\ 34,12, \text{ при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Для $F_{крH}$ $df_1 = 3$, а $df_2 = 3$.

Тогда

$$F_{кр(3,3)} = \begin{cases} 9,28, \text{ при } p \leq 0,05; \\ 29,46, \text{ при } p \leq 0,01. \end{cases}$$

Сопоставим эмпирическое и критические значения критерия.

Поскольку $F_A < F_{кр}$ и $F_B < F_{кр}$, то H_{0A} и H_{0B} принимаются, т.е. различия в продолжительности удержания физического волевого усилия, обусловленные выбором руки и условиями проведения эксперимента, являются случайными.

Также $F_{AB} < F_{кр}$ и H_{0AB} принимается: различия, обусловленные взаимодействием факторов A и B , являются случайными.

Однако $F_H \geq F_{кр}$ при $p \leq 0,05$. Следовательно H_{0H} отклоняется, принимается H_{1H} .

Произведем оценку силы факторного эффекта:

$$\eta_A = SS_A / SS_{общ} \times 100\% = 18,07 / 102,94 \times 100\% = 17,55\%;$$

$$\eta_{AB} = SS_{AB} / SS_{общ} \times 100\% = 1,55 / 102,94 \times 100\% = 1,51\%;$$

$$\eta_{AB} = SS_{AB} / SS_{общ} \times 100\% = 1,55 / 102,94 \times 100\% = 1,51\%;$$

$$\eta_H = SS_H / SS_{общ} \times 100\% = 46,19 / 102,94 \times 100\% = 44,87\%.$$

Таким образом, основной вклад в вариативность признака вносит фактор индивидуальных различий.

Представим полученный результат графически:

а) по фактору A (рука, удерживающая усилие) [27, с. 259]:

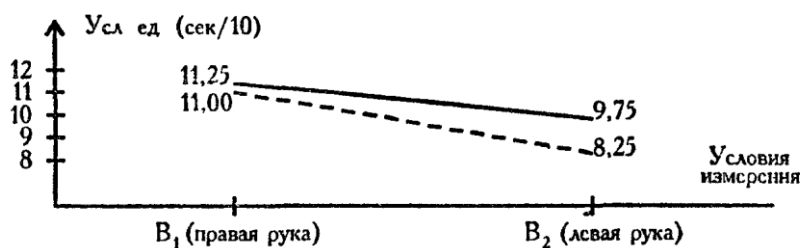


Рис. 14.4. График изменения средних величин длительности физического волевого усилия при переходе от правой руки к левой (измерения вне группы – сплошная линия, измерения в группе – пунктирная линия)

б) по фактору *B* (условия проведения эксперимента) [27, с. 259]:

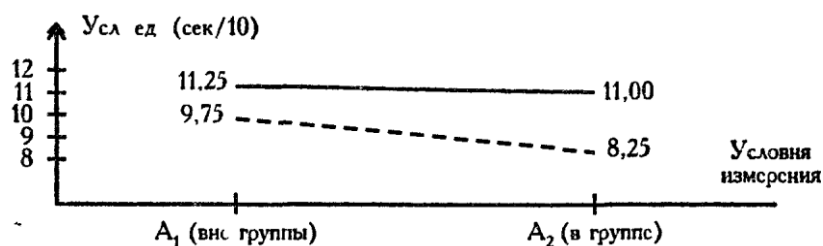


Рис. 14.5. График изменения средних величин длительности физического волевого усилия при переходе от индивидуальных замеров к групповым (правая рука – сплошная линия, левая рука – пунктирная линия)

Как следует из графиков, в группе продолжительность удержания физического волевого усилия испытуемыми несколько снижается, причем для левой руки снижение более выражено, однако эти тенденции незначимы.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое дисперсионный анализ? Какие задачи он позволяет решать?
2. В чем заключается основное отличие дисперсионного анализа от корреляционного?
3. Какую переменную называют фактором? результативным признаком? Приведите примеры.
4. Что такое градации фактора? Приведите примеры.
5. Какие ситуации возникают при разделении исследуемых переменных на факторы и результативные признаки?
6. Какие виды вариативностей сравниваются в дисперсионном анализе?
7. Что такое дисперсионный комплекс? ячейка комплекса?
8. Какие виды дисперсионного анализа используют для анализа эмпирических данных?
9. В каких случаях однофакторный дисперсионный анализ может быть заменен другими статистическими критериями?
10. Представьте алгоритм подготовки данных к дисперсионному анализу.
11. Какой дисперсионный комплекс называют равномерным?
12. Какие методы используют для проверки соответствия эмпирического распределения нормальному?

13. Какие преобразования эмпирических данных используют для упрощения расчетов в дисперсионном анализе?

14. Представьте назначение, ограничения и алгоритм применения однофакторного дисперсионного анализа для независимых выборок.

15. Представьте назначение, ограничения и алгоритм применения однофакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок.

16. Представьте назначение, ограничения и алгоритм применения двухфакторного дисперсионного анализа для независимых выборок.

17. Представьте назначение, ограничения и алгоритм применения двухфакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок.

Тема 15 Многомерный статистический анализ

План:

1. Многомерные статистические методы как средство моделирования психических явлений.

2. Классификация методов многомерного анализа.

3. Характеристика методов многомерной статистики:

3.1. факторный анализ;

3.2. кластерный анализ;

3.3. множественный регрессионный анализ;

3.4. логистический регрессионный анализ;

3.5. дискриминантный анализ;

3.6. многомерный корреляционный анализ;

3.7. многомерное шкалирование.

Основные понятия и термины: *методы многомерной статистики, эмпирические математические модели, многомерные эмпирические математические модели, факторный анализ, фактор, ортогональные факторы, облические факторы, факторные нагрузки, ротация факторов, кластерный анализ, агломеративный метод, итеративный метод, дендрограмма, множественный регрессионный анализ, логистический регрессионный анализ, дискриминантный анализ, дискриминантная переменная, многомерный корреляционный анализ, частная корреляция, многомерное шкалирование.*

1. Многомерные статистические методы как средство моделирования психических явлений [9; 18]

В тех случаях, когда необходимо упорядочить большое количество переменных (измеряемых психологических свойств, признаков), применяют *методы многомерной статистики*. Эти методы чаще всего используют специалисты в области дифференциальной психологии, которая решает проблемы индивидуальных

психологических различий, типологизации личности и т. д. Данные методы лишь условно можно назвать «статистикой», поскольку они основаны на использовании стандартных статистических методов. На самом деле они представляют собой более высокий уровень анализа данных – уровень математического моделирования различных психологических свойств, процессов и состояний.

Простейшими *эмпирическими математическими моделями*, т.е. описательными моделями, представляющими исходные данные в доступном для интерпретации виде, являются: а) средние значения признака, вычисленные для сравниваемых групп, в предположении, что различия в средних значениях отражают различия между представителями групп; б) ранжирование членов группы, которое предполагает, что порядковый номер испытуемого отражает степень выраженности изучаемого свойства.

Эмпирические математические модели, по сути, идентичны мыслительным операциям человека. Однако непосредственно сравнивать, различать, определять взаимосвязь мы можем только при небольшой численности наблюдений, групп, признаков. Когда много и объектов, и изучаемых свойств, исследователю необходимо использовать *многомерные эмпирические математические модели*.

Таким образом, многомерные методы – это дальнейшее развитие эмпирических математических моделей в отношении многостороннего описания изучаемых явлений. Они воспроизводят мыслительные операции человека, но в отношении таких данных, непосредственное осмысление которых невозможно. Многомерные методы выполняют такие интеллектуальные функции, как структурирование эмпирической информации (факторный анализ), ее классификация (кластерный анализ), прогнозирование (множественный регрессионный анализ), распознавание образов (дискриминантный анализ) и т.д.

Возникнув в начале XX в., когда Ч. Спирмен реализовал метод однофакторного дисперсионного анализа для обоснования модели общего интеллекта, эти методы начинают активно разрабатываться только в 60-х гг. в связи с развитием компьютеризации. Однако широкое применение многомерных статистических методов становится возможным лишь к концу 80-х гг. – с времени распространения персональных компьютеров. Этот факт обусловлен тем, что многомерные методы требуют циклической обработки данных и на каждом из этапов только сам исследователь должен принимать решение о характере обработки.

В настоящее время исследователь, имея в распоряжении мощные и не сложные в применении компьютерные программы, может реализовать весь процесс многомерного анализа данных. Для этого ему достаточно знать суть метода, требования к эмпирическим данным и основные показатели для интерпретации получаемых результатов.

2. Классификация методов многомерного анализа [18]

Методы многомерного анализа можно классифицировать по трем основаниям: по назначению метода, по способу сопоставления данных, по виду исходных эмпирических данных.

1. Классификация методов по назначению осуществляется в соответствии с интеллектуальной операцией, используемой для преобразования исходной информации:

а) методы предсказания (экстраполяции): множественный регрессионный анализ и дискриминантный анализ. Множественный регрессионный анализ предсказывает значения метрической «зависимой» переменной по множеству известных значений «независимых» переменных, измеренных у множества объектов. Дискриминантный анализ предсказывает принадлежность объектов к одному из известных классов номинальной шкалы по измеренным метрическим переменным;

б) методы классификации: варианты кластерного анализа и дискриминантный анализ. Кластерный анализ по измеренным характеристикам у множества объектов либо по данным об их попарном сходстве (различии) разбивает это множество объектов на группы, в каждой из которых содержатся объекты, более похожие друг на друга, чем на объекты из других групп. Дискриминантный анализ («распознавание образов») позволяет классифицировать объекты по известным классам, исходя из измеренных у них признаков, пользуясь решающими правилами, выработанными ранее на выборке идентичных объектов, у которых были измерены те же признаки;

в) структурные методы: факторный анализ и многомерное шкалирование. Факторный анализ направлен на выявление структуры переменных как совокупности факторов, каждый из которых – это скрытая, обобщающая причина взаимосвязи группы переменных. Многомерное шкалирование выявляет шкалы как критерии, по которым поляризуются объекты при их субъективном попарном сравнении.

2. Классификация методов по способу сопоставления данных основана на исходном предположении о структуре данных, т.е. предполагает их сходство (различие) или пропорциональность (корреляцию):

а) методы, основанные на корреляционной модели, т.е. исходящие из предположения о согласованной изменчивости признаков, измеренных у множества объектов. К ним относятся факторный анализ, множественный регрессионный анализ, отчасти – дискриминантный анализ;

б) методы, основанные на дистантной модели, т.е. исходящие из предположения о том, что различия между объектами можно описать как расстояние между ними. На этой модели основаны кластерный анализ и многомерное шкалирование, частично – дискриминантный анализ. Многомерное шкалирование и дискриминантный анализ добавляют предположение о том, что исходные различия между объектами можно представить как расстояния между ними в пространстве небольшого числа шкал.

3. Классификация методов по виду исходных данных:

а) методы, использующие в качестве исходных данных только признаки, измеренные у группы объектов (множественный регрессионный анализ, дискриминантный анализ и факторный анализ);

б) методы, исходными данными для которых могут быть попарные сходства (различия) между объектами. К ним относятся кластерный анализ и многомерное шкалирование. Многомерное шкалирование, кроме того, может анализировать данные о попарном сходстве между совокупностью объектов, оцененных группой экспертов. При этом совместно анализируются как различия между объектами, так и индивидуальные различия между экспертами.

Представленные классификации свидетельствуют о необходимости знания возможностей и ограничений многомерных методов уже на стадии планирования исследования. Например, ориентируясь только на факторную модель, исследователь ограничен в выборе процедуры диагностики: она должна состоять в измерении признаков у множества объектов. При этом исследователь ограничен и в направлении поиска: он изучает либо взаимосвязи между признаками, либо межгрупповые различия по измеряемым признакам. Общая осведомленность о различных многомерных методах позволит исследователю использовать более широкий круг психодиагностических процедур, решать более широкий спектр не только научных, но и практических задач.

3. Характеристика методов многомерной статистики

Наиболее часто в психологии используются кластерный и факторный анализ, реже – дискриминантный анализ. Каждый из них давно уже перерос из отдельных методов в самостоятельные области математической статистики.

Рассмотрим некоторые из многомерных статистических методов подробнее.

3.1. Факторный анализ

Назначение. Факторный анализ – метод многомерного анализа, который направлен на выявление структуры переменных как совокупности факторов. В основе факторного анализа лежит следующая гипотеза. Измеряемые переменные являются лишь косвенными характеристиками изучаемых объектов, их внешними проявлениями. На самом деле существуют внутренние (латентные, не наблюдаемые непосредственно) характеристики, число которых невелико и которые определяют значения наблюдаемых переменных. Эти внутренние характеристики называют *факторами*. Отдельные же наблюдаемые значения переменных являются линейными комбинациями факторов, которые не могут быть обнаружены в процессе наблюдения, но могут быть вычислены. Таким образом, фактор – это искусственный статистический показатель, единица группировки переменных на основе имеющихся связей. Каждый фактор – это скрытая обобщающая причина взаимосвязи группы переменных [14].

Основными методами, используемыми в факторном анализе, являются метод главных компонент и собственно факторный анализ, который, в свою очередь, включает такие методы, как факторный анализ образов, центроидный метод, метод максимального правдоподобия, метод главных осей и т.д. [22].

Метод главных компонент позволяет создать несколько новых переменных y_1, y_2, \dots, y_p , каждая из которых является линейной комбинацией измеряемых переменных x_1, x_2, \dots, x_p :

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p, \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p, \\&\dots \\y_p &= a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p.\end{aligned}$$

Переменные y_1, y_2, \dots, y_p называются главными компонентами или факторами, а коэффициенты a_{ij} – факторными нагрузками, которые представляют собой коэффициент корреляции между исходной переменной и фактором.

В ходе вычислительных процедур метода главных компонент, во-первых, одновременно получают все главные компоненты, число которых первоначально равно числу исходных переменных; во-вторых, имеется возможность полного разложения дисперсии всех исходных переменных, т.е. полное ее объяснение через факторы, которые, как правило, не равноценны по своему значению.

В отличие от метода главных компонент метод факторного анализа предполагает, что: во-первых, существует некоторое небольшое количество скрытых фундаментальных переменных f_1, f_2, \dots, f_k (факторов), которые связаны с наблюдаемыми переменными x_1, x_2, \dots, x_p , причем $k < p$; во-вторых, часть дисперсии исходных переменных остается нераспознанной, т.е. не объясняется действием факторов; в-третьих, выделение факторов осуществляется последовательно: первый, объясняющий наибольшую долю вариации переменных, затем второй, объясняющий вторую по величине часть дисперсии и т.д. Математическая запись факторного анализа выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_{11}f_1 + \lambda_{12}f_2 + \dots + \lambda_{1p}f_k + u_1, \\x_2 &= \lambda_{21}f_1 + \lambda_{22}f_2 + \dots + \lambda_{2p}f_k + u_2, \\&\dots \\x_p &= \lambda_{p1}f_1 + \lambda_{p2}f_2 + \dots + \lambda_{pp}f_k + u_p,\end{aligned}$$

где λ_{ij} – факторные нагрузки, которые представляют собой коэффициенты корреляции между измеряемыми и латентными переменными (если факторы не коррелируют), u_i – случайная погрешность (характерность) – часть наблюдаемой переменной, которая не объясняется действием факторов.

Поскольку результаты, полученные с помощью метода главных компонент и методов собственно факторного анализа, существенно не отличаются друг от друга, то использование любого из этих методов называют применением факторного анализа [22].

Факторный анализ применяется не для сырых данных, а для исследования корреляционных связей между переменными, т.е. для коэффициентов корреляции, вычисленных между переменными исследования (чаще по Пирсону) [9]. Например, Л. Терстоун измерил 20 различных показателей у коробок разных размеров и форм. Проведя факторный анализ, он свел их к трем факторам (длине, ширине и высоте), корреляция между которыми равна нулю.

Факторный анализ решает следующие задачи: 1) сокращение числа переменных (редукция данных); 2) определение структуры взаимосвязей между переменными (классификация переменных).

Ограничения:

1) нельзя факторизовать качественные данные, полученные по номинальной шкале (например, цвет волос: черный, каштановый, рыжий);

2) все переменные должны быть независимыми, а их распределение близко к нормальному;

3) связи между переменными должны быть приблизительно линейны;

4) в исходной корреляционной матрице должно быть несколько корреляций по модулю больших 0,3, иначе из матрицы будет сложно извлечь факторы;

5) выборка должна быть достаточно большой ($n > 100$). Но если коэффициенты корреляции между переменными примерно равны 0,7, то испытуемых может быть меньше.

Процедура факторизации включает в себя три этапа. Рассмотрим ее на примере [9].

У случайной выборки из 100 студентов были получены следующие данные: вес тела (v_1), количество лекций и семинаров, посещенных по предмету (v_2), длина ноги (v_3), количество прочитанных по предмету книг (v_4), длина руки (v_5), экзаменационная оценка по предмету (v_6).

1-й этап. Строят исходную таблицу данных.

Для рассматриваемого примера исходная таблица имеет вид 100x6 (таблица 15.1):

Таблица 15.1

Таблица для проведения факторного анализа

№ п.п.	Вес тела	Количество посещенных занятий	Длина ноги	Количество прочитанных книг	Длина руки	Экзаменационная оценка
1						
2						
...						
100						

2-й этап. Вычисляют коэффициенты корреляции r_{xy} между экспериментальными переменными и строят корреляционную матрицу (матрицу интеркорреляций).

В нашем примере это матрица размером 6x6. Наименование столбцов и строк в матрице интеркорреляций всегда одинаково. Это перечень переменных, включенных в анализ (таблица 15.2):

Таблица 15.2

Матрица интеркорреляций экспериментальных переменных

Переменные	Вес тела (v_1)	Количество посещенных занятий (v_2)	Длина ноги (v_3)	Количество прочитанных книг (v_4)	Длина руки (v_5)	Экзаменационная оценка (v_6)
Вес тела (v_1)	1	$r_{v_1v_2}$	$r_{v_1v_3}$	$r_{v_1v_4}$	$r_{v_1v_5}$	$r_{v_1v_6}$

Переменные	Вес тела (v_1)	Количество посещенных занятий (v_2)	Длина ноги (v_3)	Количество прочитанных книг (v_4)	Длина руки (v_5)	Экзаменационная оценка (v_6)
Количество посещенных занятий (v_2)	$r_{v_1v_2}$	1	$r_{v_2v_3}$	$r_{v_2v_4}$	$r_{v_2v_5}$	$r_{v_2v_6}$
Длина ноги (v_3)	$r_{v_1v_3}$	$r_{v_2v_3}$	1	$r_{v_3v_4}$	$r_{v_3v_5}$	$r_{v_3v_6}$
Количество прочитанных книг (v_4)	$r_{v_1v_4}$	$r_{v_2v_4}$	$r_{v_3v_4}$	1	$r_{v_4v_5}$	$r_{v_4v_6}$
Длина руки (v_5)	$r_{v_1v_5}$	$r_{v_2v_5}$	$r_{v_3v_5}$	$r_{v_4v_5}$	1	$r_{v_5v_6}$
Экзаменационная оценка (v_6)	$r_{v_1v_6}$	$r_{v_2v_6}$	$r_{v_3v_6}$	$r_{v_4v_6}$	$r_{v_5v_6}$	1

Матрицы всегда квадратные и симметричные: т.е. на симметричных относительно главной диагонали местах стоят одни и те же коэффициенты корреляции. Поэтому для простоты обычно строят только нижнюю часть матрицы интеркорреляций.

3-й этап. Факторизация матрицы интеркорреляций, т.е. извлечение из нее факторов.

В результате расчетов получают факторную матрицу, элементами которой являются *факторные нагрузки (или веса)* – коэффициенты корреляции между соответствующей переменной и фактором. В нашем случае факторная матрица будет иметь вид (таблица 15.3)

Таблица 15.3

Результаты факторного анализа

Переменные	Фактор 1	Фактор 2
Вес	0,91	0,01
Кол-во посещений	0,20	0,96
Длина ноги	0,94	-0,15
Кол-во прочитанных книг	0,11	0,85
Длина руки	0,89	0,07
Экзаменационная оценка	-0,13	0,93

Минимальный уровень значимости факторной нагрузки (коэффициента корреляции) берется равным 0,4 (иногда 0,3) по абсолютной величине. Значимые коэффициенты корреляции выделяют жирным шрифтом. Чем больше факторная нагрузка, тем теснее ее связь с фактором. Анализ факторной матрицы позволяет сделать вывод, что:

- фактор 1 образуется переменными (v_1), (v_3), (v_5);
- фактор 2 образуется переменными (v_2), (v_4), (v_6).

Тогда фактор 1 можно назвать «размеры тела», а фактор 2 – «уровень подготовки по предмету».

Поскольку каждый фактор также является переменной величиной, то они тоже могут коррелировать между собой. При этом возможны два случая [9]:

1) корреляция между факторами равна нулю. Такие факторы называют *ортгональными*. Например, длина, ширина и высота в опыте Л. Терстоуна.

2) корреляция между фактором 1 и фактором 2 отлична от нуля. Это *облические факторы*. Они описывают более сложные взаимодействия.

Фактор – это искусственная единица. Она условна, поскольку, изменив процедуру факторизации матрицы интеркорреляций, мы можем получить другую факторную структуру.

Существует понятие *простой структуры факторной матрицы* [9]. Для нее характерно выполнение 2-х условий: 1) каждая переменная имеет значимые нагрузки только по одному из факторов; 2) сами факторы являются ортогональными. В рассматриваемом примере факторная матрица имеет простую структуру.

Если факторы ортогональны, то по факторным нагрузкам можно определить, какая часть дисперсии фактора обусловлена влиянием каждой переменной. Для этого вычисляют коэффициент детерминации r_{xy}^2 . Для матрицы в рассматриваемом примере получаем (таблица 15.4):

Таблица 15.4

Представление дисперсии, обусловленной влиянием переменных

Переменные	Фактор 1	Фактор 2	Коэффициент детерминации (r_{xy}^2):	
			по фактору 1	по фактору 2
Вес	0,91	0,01	0,8281	0,0001
Количество посещений	0,20	0,96	0,0400	0,9216
Длина ноги	0,94	-0,15	0, 8836	0,0225
Количество прочитанных книг	0,11	0,85	0,0121	0,7225
Длина руки	0,89	0,07	0,7921	0,0049
Экзаменационная оценка	-0,13	0,93	0,0169	0,8649
Собственное значение фактора			$\Sigma = 2, 4863$	$\Sigma = 2,5365$
Процент общей дисперсии по фактору			41,4% = $= 2, 4863:6 \cdot 100\%$	42,3% = $= 2,5365:6 \cdot 100\%$

Таким образом, фактор 1 объясняет 41,4% информации (дисперсии) в исходной корреляционной матрице, фактор 2 – 42,3%, а в сумме – 83,7%. Остальные 16,3% потерялись из-за уменьшения данных с шести переменных до двух.

Для простоты интерпретации данных иногда используют *вращение (ротацию) факторов*. Для этого факторы перемещают относительно переменных так, что каждый фактор начинает обладать несколькими большими нагрузками и несколькими нагрузками примерно равными нулю. Получается простая факторная структура, которую удобно анализировать (как в рассмотренном выше примере).

Выделяют следующие варианты вращений [9]:

1) *косоугольное (облическое)* – приводит к зависимым факторам. Примером косоугольного вращения является *облимин*.

2) *ортогональное* – факторы остаются независимыми. Оно подразделяется на:

2.1) *варимакс* – минимизирует количество переменных, имеющих высокие нагрузки на данный фактор. При этом максимально увеличивается дисперсия фактора за счет группировки вокруг него тех переменных, которые в большей степени связаны с ним, чем другие;

2.2) *квартимакс* – минимизирует количество факторов, необходимых для объяснения переменных. Позволяет выделить один фактор с высокими нагрузками на большинство переменных;

2.3–2.4) *эквимакс* и *биквартимакс* – комбинации двух предыдущих вращений.

Приемы определения числа факторов [9]:

1) выясняют, не приводит ли увеличение числа факторов к уменьшению доли факторных нагрузок в интервале от -0,4 до +0,4. Если да, то увеличение не имеет смысла;

2) не разделились ли какие-либо известные факторы на два и более частных. Если да, то извлечено слишком много факторов;

3) не появляются ли большие корреляции при осуществлении облических вращений. Если да, то извлечено слишком много факторов, которые коррелируют между собой, проходят через один и тот же класс переменных;

4) исследуют число вкладов первых n факторов в общую дисперсию. Если она составляет примерно 85–90% этим числом факторов ограничиваются. Так, в нашем примере выделенные факторы объясняют более 83% общей дисперсии и их анализом можно ограничиться.

Последовательность факторного анализа [22]:

1) выбор исходных данных;

2) выбор числа факторов;

3) выбор метода факторного анализа;

4) факторизация матрицы интеркорреляций;

5) вращение факторов;

6) интерпретация полученных данных.

Решение задач факторного анализа осуществляется в универсальных статистических пакетах [10, с. 320–343].

3.2. Кластерный анализ

В психологии кластерный анализ используется при исследовании структуры психологических свойств индивида, степени общности различных психологических характеристик, характера их взаимной упорядоченности, взаимоотношений с множеством других признаков и т. д. Кластерный анализ имеет смысл проводить в тех случаях, когда регистрируется большое число (больше десяти) переменных.

Назначение. Кластерный (таксономический) анализ используется для упорядочивания объектов и объединения их в группы схожих объектов в выборке данных, называемых кластерами. Кластер – это группа объектов, характеризующихся повышенной плотностью (сгущенностью внутри группы) и незначительной дисперсией (рассеянием) [13].

Особенности кластерного анализа [22]:

1) методы кластерного анализа – это довольно простые процедуры, не имеющие, как правило, достаточного статистического обоснования, т.е. эвристические методы;

2) методы кластерного анализа могут порождать различные решения для одних и тех же исходных данных;

3) в результате кластерного анализа в исходные данные может привноситься структура, которая может не совпадать с искомой «реальной».

Задача кластерного анализа заключается в том, чтобы все объекты, содержащиеся в множестве исходных данных, разбить на подмножества (кластеры) так, чтобы каждый объект принадлежал одному и только одному кластеру. При этом объекты, принадлежащие одному и тому же кластеру, были однородными (сходными), в то время как объекты, принадлежащие разным кластерам, были разнородными (несходными) по выбранному критерию [14].

Однородность объектов определяется по расстоянию между ними $p(x_i, x_j)$. Объекты считаются сходными, если это расстояние меньше некоторого предельного расстояния p . Чем меньше расстояние между объектами, тем больше между ними сходства [13].

Для определения предельного расстояния используются следующие наиболее употребимые *меры сходства* [22]:

а) Евклидова метрика: $p(x_i, x_j) = \sqrt{\sum (x_i - x_j)^2}$;

б) квадрат Евклидовой метрики: $p(x_i, x_j) = \sum (x_i - x_j)^2$;

в) манхэттенское расстояние: $p(x_i, x_j) = \sum |x_i - x_j|$;

г) метрика Чебышева: $p(x_i, x_j) = \max |x_i - x_j|$.

Существуют и другие, более сложные меры расстояния, выбор которых определяется субъективным предпочтением исследователя, типом данных и природой решаемой задачи.

Двумя наиболее часто используемыми *методами кластеризации* являются иерархический агломеративный (объединительный) и итеративный метод k -средних. Рассмотрим их подробнее [13; 22].

1. *Агломеративный метод*. Его суть заключается в последовательном объединении наиболее близких объектов в один кластер. Исходными данными для анализа являются сырые данные, или матрица расстояний между объектами. Если матрица расстояний еще не вычислена, то алгоритм агломеративного метода начинается с вычисления расстояний между объектами. Для этого используется одна из рассмотренных выше мер сходства.

Следующий шаг заключается в выборе и реализации правила иерархического объединения кластеров. Чаще других используются следующие методы [22]:

- метод одиночной связи. На первом шаге объединяются два объекта, имеющие между собой максимальную меру сходства. Затем к ним присоединяется объект с максимальной мерой сходства с одним из объектов кластера. В со-

ответствии с этим правилом процесс продолжается и дальше, т.е. для включения объекта в кластер требуется максимальное сходство лишь с одним членом кластера. Недостатком метода является образование слишком больших кластеров;

- метод полной связи: объект может быть включен в кластер, если мера сходства между ним и каждым членом кластера не превышает некоторого порогового значения;

- центроидный метод: расстояние между двумя кластерами определяется как евклидово расстояние между центрами (средними) этих кластеров. Кластеризация осуществляется поэтапно: на каждом шаге объединяют два кластера, расстояние между которыми минимально;

- метод Уорда направлен на объединение близко расположенных кластеров, которое дает минимальное приращение внутригрупповой суммы квадратов отклонений, т.е. оптимизирует минимальную дисперсию внутри кластеров. Этот метод широко применяется в социальных науках.

Наряду с перечисленными используются и другие методы кластеризации. Выбор правила иерархического объединения кластеров осуществляется исследователем и определяется характером решаемых им задач.

2. Метод k -средних.

Это итеративный метод (от «итерация» – перемещение), который работает непосредственно с сырыми данными, а не матрицей сходства. С помощью метода k -средних объект относится к тому классу, расстояние до которого минимально. При этом расстояние определяется с помощью Евклидовой метрики.

Метод k -средних отличается от агломеративного тем, что позволяет исследователю заранее задать число кластеров, исходя из решаемой им задачи. Программа начинает работу с k случайных кластеров, а затем перемещает объекты из одного кластера в другой так, чтобы выполнялось два условия:

- минимизировалась дисперсия внутри кластера;
- максимизировалась дисперсия между кластерами.

Процесс перемещения объектов повторяется до тех пор, пока кластеры не перестанут изменяться или число итераций не превысит заданное пользователем число. В результате применения метода k -средних все объекты будут разбиты на заданное количество классов, которые максимально различаются между собой.

Графически кластерный анализ можно представить в виде дерева объединения – *дендрограммы*.

Пример 1 [13]. У семи учащихся были измерены три признака – показатели осведомленности, интеллекта и среднего балла успеваемости. Провести кластеризацию и представить ее результаты в виде дендрограммы. Данные представлены в таблице:

№ п.п.	Осведомленность	Средний IQ	Средний балл успеваемости
1	12	10,3	3,93
2	10	10,7	4,27
3	11	10	3,87
4	14	11,6	4,57
5	12	9,27	4,14
6	10	10,5	4,93
7	9	7	3,71

Решение. Исходными данными для кластерного анализа являются сырые данные. Построим матрицу расстояний между объектами. Для этого найдем расстояние между объектами 1 и 2, воспользовавшись Евклидовой метрикой:

$$p = \sqrt{(12-10)^2 + (10,3-10,7)^2 + (3,93-4,27)^2} = \sqrt{2^2 + (-0,4)^2 + (-0,34)^2} = 2,07.$$

Рассчитав подобным образом все расстояния, строим матрицу расстояний, значения которой всегда будут симметричны относительно диагонали:

	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
№1	0	2,07	1,05	2,47	1,05	2,24	4,47
№2	2,07	0	1,28	4,11	2,46	0,69	3,87
№3	1,05	1,28	0	3,47	1,27	1,54	3,61
№4	2,47	4,11	3,47	0	3,1	4,16	6,85
№5	1,05	2,46	1,27	3,1	0	2,48	3,79
№6	2,24	0,69	1,54	4,16	2,48	0	3,84
№7	4,47	3,87	3,61	6,85	3,79	3,84	0

Находим в таблице наименьшее из расстояний. Это расстояние между объектами 2 и 6, которое равно 0,69: $p_{\min} = p_{2-6} = 0,69$. Таким образом, мы можем объединить в единую группу объекты 2 и 6. При этом надо в объединенных ячейках вытеснить большее значение меньшим и уменьшить матрицу:

	1	2-6	3	4	5	7
1	0	2,07 2,24	1,05	2,47	1,05	4,47
2-6	2,07 2,24	0 0,69	1,28 1,54	4,11 4,16	2,46 2,48	3,87 3,84
3	1,05	1,28 1,54	0	3,47	1,27	3,61
4	2,47	4,11 4,16	3,47	0	3,1	6,85
5	1,05	2,46 2,48	1,27	3,1	0	3,79
7	4,47	3,87 3,84	3,61	6,85	3,79	0

Окончательно уменьшенная матрица расстояний выглядит следующим образом:

	1	2-6	3	4	5	7
1	0	2,07	1,05	2,47	1,05	4,47
2-6	2,07	0	1,28	4,11	2,46	3,84
3	1,05	1,28	0	3,47	1,27	3,61
4	2,47	4,11	3,47	0	3,1	6,85
5	1,05	2,46	1,27	3,1	0	3,79
7	4,47	3,84	3,61	6,85	3,79	0

Следующее наименьшее расстояние в матрице – 1,05, т.е. $p_{1-3} = 1,05$ и $p_{1-5} = 1,05$. Теперь мы можем объединить в один кластер объекты 1, 3, 5.

Строим еще более уменьшенную матрицу, ужимаем ее и вытесняем большие значения меньшими в объединенных ячейках. Наименьшее расстояние в этой матрице $p_{(1-3-5)-(2-6)} = 1,28$:

	1-3-5	2-6	4	7
1-3-5	0 1,05 1,05	2,07 1,28 2,46	2,47 3,47 3,1	4,47 3,61 3,79
2-6	2,07 1,28 2,46	0	4,11	3,84
4	2,47 3,47 3,1	4,11	0	6,85
7	4,47 3,61 3,79	3,84	6,85	0

Следовательно, мы можем объединить в одну группу объекты 1, 2, 3, 5, 6. Вновь ужимаем матрицу:

	1-3-5-2-6	4	7
1-3-5-2-6	0 1,28	2,47 4,11	3,61 3,84
4	2,47 4,11	0	6,85
7	3,61 6,84	6,85	0

Следующее наименьшее расстояние в ней – 2,47: $p_{(1-3-5)-(2-6)-4} = 2,47$. Объединяем кластеры 1-3-5-2-6 и 4. Уменьшаем матрицу в последний раз.

Минимальное расстояние равно 3,61: $p_{((1-3-5)-(2-6)-4)-7} = 3,61$:

	1-3-5-2-6-4	7
1-3-5-2-6-4	0 2,47	3,61 6,65
7	3,61 6,65	0

По результатам обработки строим дендрограмму, которая выглядит следующим образом [13, с. 142]:

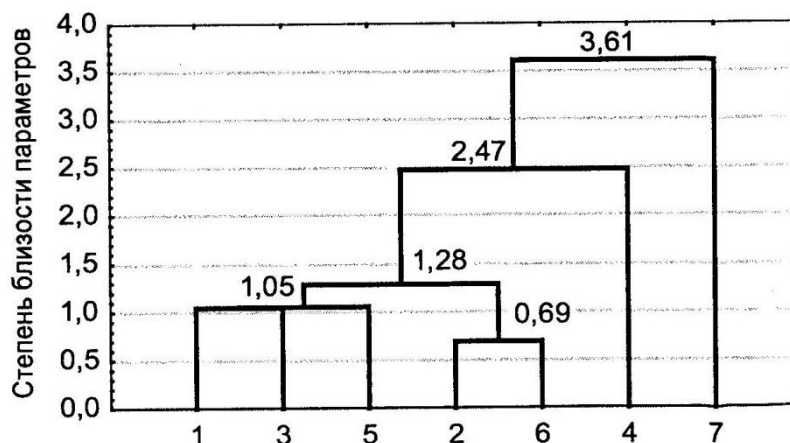


Рис. 15. Дендрограмма, полученная при проведении кластерного анализа трех переменных, измеренных у семи испытуемых

Объекты, принадлежащие к одному кластеру, обладают наибольшей степенью близости исследуемых параметров. Вначале в один кластер объединяются два объекта с наиболее близкими показателями (2 и 6). Затем в другой кластер группируются объекты 1, 3 и 5. Потом обе группы объединяются, но уже при меньшей степени однородности. Затем к образовавшемуся кластеру присоединяют еще один объект с похожими параметрами (4), и затем объект 7.

Последовательность кластерного анализа:

- 1) отбор объектов для кластеризации;
- 2) определение множества переменных, по которым будут отличаться объекты кластеризации;
- 3) выбор метода кластерного анализа:
 - а) для агломеративного метода выбирают меру сходства и метод объединения объектов в кластеры;
 - б) для итеративного метода задают число кластеров;
- 4) интерпретация полученных данных.

При проведении кластерного анализа вычисления вручную весьма сложны, и чаще эта задача выполняется с помощью статистических программ [10, с. 285–303].

3.3. Множественный регрессионный анализ [9; 18; 31]

Назначение. Множественный регрессионный анализ используется для изучения взаимосвязи между одной переменной (зависимой) и несколькими другими переменными (независимыми). Он позволяет изучить возможности предсказания зависимой переменной по ряду предварительно измеренных независимых. При этом предполагается, что связь между переменными можно выразить линейным уравнением

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_mX_m,$$

где X_1, X_2, \dots, X_m (независимые переменные), a (свободный член) и b_1, b_2, \dots, b_m (коэффициенты корреляции факторов с результирующим признаком) являются параметрами модели предсказания.

В таблице 15.5 представлена характеристика переменных, которые могут быть подвергнуты обработке с помощью линейного регрессионного анализа.

Таблица 15.5

Основные характеристики переменных, участвующих в линейном регрессионном анализе

Зависимые переменные		Независимые переменные	
количество	тип	количество	тип
одна	интервальная	любое	интервальная
	порядковая		порядковая
			дихотомическая

Например, психологу нужно предсказать успеваемость абитуриента по измеренным психологическим характеристикам (интеллект, особенности личности и т. д.). В этом случае необходимо использовать уже имеющиеся данные о взаимосвязи успеваемости (зависимая переменная) и психологических показателей,

полученных в результате психологического тестирования за прошлые годы (независимые переменные). Применяя множественный регрессионный анализ, исследователь получает модель предсказания. Подставляя в эту модель данные конкретного абитуриента, психолог получает предсказание его успеваемости.

Коэффициенты b_1, b_2, \dots, b_m называют *нестандартизированными* коэффициентами линейной регрессии. Они показывают среднее изменение зависимой переменной при изменении на единицу соответствующей этому коэффициенту независимой переменной при неизменных других независимых переменных. Эти коэффициенты позволяют определить, какие из независимых переменных наиболее существенны, т.е. дают больший вклад в предсказание зависимой переменной, а какими переменными можно пренебречь, исключив их из анализа.

Пример [9]. В исследовании Р. Кеттелла было установлено, что эффективность деятельности психолога-практика и психолога-исследователя можно прогнозировать на основе разных характеристик, поскольку уравнения множественной регрессии имеют разный вид:

$$Y_{\text{практика}} = 0,72A + 0,29B + 0,29H + 0,29N,$$

$$Y_{\text{исследователя}} = 0,31A + 0,78B + 0,47N,$$

где A – готовность к контактам, B – общая интеллектуальность, H – ненасыщаемость контактами, N – умение поддерживать контакт.

Как следует из уравнений регрессии, для психолога-исследователя не характерно наличие интенсивного общения (готовность к контактам и ненасыщаемость ими), в то время как для психолога-практика это основное качество.

Обработка данных с помощью статистических пакетов позволяет получить кроме нестандартизированных коэффициентов регрессии (обозначаются символом B) *стандартизированные* коэффициенты регрессии, для обозначения которых используется символ β . Стандартизация здесь означает умножение соответствующего коэффициента B на стандартное отклонение независимой переменной и затем деление этого произведения на стандартное отклонение зависимой переменной. Благодаря этому стандартизированные коэффициенты корреляции β позволяют непосредственно сравнивать относительный вклад независимых переменных, имеющих разную размерность, в предсказание зависимой переменной. По их величине можно оценить, на сколько единиц стандартного отклонения изменится зависимая переменная при изменении на одно стандартное отклонение независимой переменной при условии постоянства остальных независимых переменных.

Если в регрессионном анализе в качестве независимых переменных рассматриваются качественные признаки, их предварительно нужно оцифровать, используя так называемые фиктивные переменные. Они получили такое название, поскольку могут принимать всего два значения – ноль или единица. При оцифровке вводят количество фиктивных переменных, число которых на единицу меньше, чем число уровней моделируемого показателя. Это необходимо для того, чтобы такие переменные не оказались бы линейно зависимыми. В этом случае коэффициенты регрессии при фиктивных переменных показывают, насколько в среднем изменится величина зависимой переменной, если перейти с одного уровня фиктивной переменной на другой (в случае двухуровневого пока-

зателя). Если же показатель имеет больше двух уровней, то коэффициенты регрессии показывают, насколько величина зависимой переменной для данного уровня фиктивной переменной отличается от ее величины при уровне, который не был введен при ее оцифровке.

Например, переменная «квалификация работника» имеет три уровня (высокий, средний и низкий), тогда вводят две фиктивные переменные: $z_1 = 1$ – для высокого уровня, 0 – для других уровней; $z_2 = 1$ – для среднего уровня, 0 – для других уровней. Моделируем с помощью линейной регрессии величину зарплаты специалистов в зависимости от нескольких признаков, в том числе и уровня квалификации. Тогда коэффициент регрессии при переменной z_1 показывает, насколько зарплата специалистов с высоким уровнем квалификации отличается от зарплаты специалистов с низким уровнем квалификации при прочих равных условиях; коэффициент при переменной z_2 показывает, насколько зарплата специалистов со средним уровнем квалификации отличается от зарплаты специалистов с низким уровнем квалификации при прочих равных условиях.

Основными задачами множественного регрессионного анализа являются:

1) определение того, в какой мере зависимая переменная связана с совокупностью независимых переменных, какова статистическая значимость этой взаимосвязи. Показатель – коэффициент множественной корреляции и его статистическая значимость, определяемая по критерию Фишера;

2) определение существенности вклада каждой независимой переменной в оценку зависимой переменной, отсев несущественных для предсказания независимых переменных. Показатели – коэффициенты регрессии и их статистическая значимость;

3) анализ точности предсказания и вероятностных ошибок оценки зависимой переменной. Показатель – коэффициент детерминации, интерпретируемый как доля дисперсии зависимой переменной, объясняемая совокупностью независимых переменных. Вероятностные ошибки предсказания анализируются по расхождению действительных значений зависимой переменной и значений, оцененных при помощи модели множественного регрессионного анализа;

4) оценка (предсказание) неизвестных значений зависимой переменной по известным значениям независимых переменных. Она осуществляется по вычисленным параметрам множественной регрессии.

Множественный регрессионный анализ имеет ряд ограничений:

- независимые переменные должны сильно коррелировать с зависимой переменной и слабо – друг с другом. В противном случае возникает эффект *мультиколлинеарности*, при котором несколько независимых переменных могут иметь настолько сильную корреляцию, что в регрессионной модели обозначают по сути одно и то же, что приводит к ее искажению. Необходимо либо объединить эти переменные в одну, либо построить регрессионную модель только на одной из них;

- используемые в регрессионном анализе статистические данные должны быть однородными, что обеспечивает постоянство дисперсии случайных оши-

бок регрессионной модели. Если это требование не соблюдается, возникает *гетероскедастичность* – неоднородность наблюдений, которая выражается в неодинаковой (непостоянной) дисперсии случайной ошибки регрессионной модели, и статистические выводы о качестве полученных оценок могут быть неадекватными.

Если независимых переменных много и наблюдается множество связей между ними, то целесообразно провести факторный анализ этих переменных с вычислением значений факторов.

Если при проведении множественного регрессионного анализа получается неэффективный прогноз, то переходят к нелинейному оцениванию. В этом случае зависимую переменную представляют как логарифмическую, степенную и другие элементарные функции от независимых переменных или как их комбинации.

Решение задач множественного регрессионного анализа осуществляется в статистических пакетах [10, с. 362–376].

3.4. Логистический регрессионный анализ [31]

Назначение. Логистический регрессионный анализ является альтернативой линейной регрессионной модели в случае, если зависимая переменная измерена в номинальной или порядковой шкале, поскольку при этом нельзя проинтерпретировать предсказанные по регрессии значения зависимой переменной в непрерывной количественной шкале.

Логистическая регрессия – это статистическая модель, используемая для предсказания вероятности возникновения интересующего признака с помощью логистической функции. При этом используют три вида логистического регрессионного анализа.

Бинарная логистическая регрессия – это регрессионная модель, в которой зависимая переменная может принимать лишь два значения, т.е. является бинарной, дихотомической: например, принадлежность к определенной группе (успешный студент или неуспешный студент), варианты ответа на утверждения опросника («да» или «нет»), результаты действия (справился с заданием или не справился). В случае бинарной логистической регрессии исследуется зависимость дихотомической переменной от одной или нескольких независимых переменных, измеренных в шкале любого типа.

Пример. Необходимо предсказать результаты трудоустройства выпускников одного вуза на основании пола, года окончания вуза и среднего балла успеваемости, полученного за годы обучения. Бинарный логистический анализ позволяет оценить влияние трех независимых переменных (пол, год окончания вуза и средний балл) на зависимую переменную, которая представлена в номинальной дихотомической шкале (работает – не работает).

Мультиномная логистическая регрессия применяется для предсказания зависимой переменной, которая имеет более двух градаций, по совокупности независимых переменных, представленных либо в номинальной, либо в порядковой шкале.

Пример. Мультиномная логистическая регрессия по трем независимым переменным (пол, год окончания вуза и успеваемость) позволяет предсказать зависимую переменную «за-

работная плата» с пятью градациями, кодирующими интервалы зарплаты (до 500\$, до 600\$, до 700\$, до 800\$, до 900\$).

Ординальная (порядковая) логистическая регрессия используется в том случае, когда зависимая переменная относится к порядковой шкале. Причем независимые переменные должны быть либо номинальными, либо порядковыми.

Мультиномный логистический регрессионный анализ является наиболее универсальным и в целом способен заменить собой два других метода. Однако наиболее качественное приближение статистических моделей может быть достигнуто только при использовании трех описываемых методов: для каждого случая – свой. В таблице 15.6 систематизированы основные характеристики переменных, участвующих в рассматриваемых типах логистического регрессионного анализа.

Таблица 15.6

**Основные характеристики переменных,
участвующих в логистическом регрессионном анализе**

Тип регрессионной модели	Зависимые переменные		Независимые переменные	
	количество	тип	количество	тип
- бинарная логистическая регрессия	одна	дихотомическая	любое	любая
- мультиномная логистическая регрессия	одна	номинальная или порядковая	любое	номинальная или порядковая
- порядковая логистическая регрессия	одна	порядковая	любое	номинальная или порядковая

В прикладном статистическом анализе логистическая регрессия используется для решения двух задач: моделирования взаимосвязи и классификации наблюдений. Описываемые методы, согласно значениям одной или нескольких независимых переменных (факторов), позволяют классифицировать респондентов по двум (бинарная) или более (мультиномная) группам, которые выражаются уровнями (вариантами ответа) какой-либо одной переменной. Также для каждого респондента в выборке будет рассчитана вероятность попадания в ту или иную группу.

Логистическую регрессию широко применяют при проведении клинических исследований в медицине, для моделирования поведения покупателей в маркетинговых исследованиях и других сферах.

3.5. Дискриминантный анализ [18]

Назначение. Дискриминантный анализ (от лат. *discriminatio* – различение) используется как альтернатива множественному регрессионному анализу в случае, если зависимая переменная измерена не в метрических шкалах, а в шкале наименований. Он позволяет предсказывать значения зависимой переменной по значениям совокупности независимых переменных, а также определять, какие независимые переменные наиболее важны для предсказания. При этом дискриминантный анализ имеет ряд преимуществ: он является более универсальным

методом (любые данные могут быть сведены к шкале наименований, и не требуется нормального распределения зависимой переменной), его прогностическая эффективность выше, однако он относится к наиболее сложным методам.

При дискриминантном анализе N объектов (испытуемых) разделяются на G классов так, чтобы в каждом классе содержалось не менее двух объектов. Каждый объект относится к одному и только одному классу (градации номинальной переменной), а некоторые объекты не будут отнесены ни к одному из этих классов (являются «неизвестными»). Для каждого из объектов имеется совокупность данных по P количественным признакам, одним и тем же для этих объектов. Эти количественные признаки называются *дискриминантными переменными*.

Основные задачи дискриминантного анализа заключаются в следующем:

а) определить решающие правила, позволяющие по значениям дискриминантных переменных отнести каждый объект (в том числе и «неизвестный») к одному из известных классов;

б) определить «вес» каждой дискриминантной переменной для разделения объектов на классы.

Пример. Студенты ($N = 25$) разделены на три группы ($G = 3$) по успешности обучения (высокий, средний и низкий уровень успешности). В качестве дискриминантных переменных ($P = 4$) выступают баллы, полученные при тестировании, средний балл аттестата, пол, возраст. При помощи дискриминантного анализа мы можем выделить переменные, наиболее важные для предсказания успешности обучения. Кроме того, по этим показателям мы можем предсказать успешность обучения будущих абитуриентов.

Таким образом, дискриминантный анализ позволяет исследователю:

1) ответить на вопрос, насколько хорошо можно отличить один класс от другого, используя данный набор переменных, и какие из этих переменных наиболее существенны для различения классов (сходную задачу решает дисперсионный анализ);

2) расклассифицировать объекты, т.е. отнести каждый объект к одному из классов, исходя только из значений дискриминантных переменных. При этом определяются «решающие правила», позволяющие по значениям дискриминантных переменных отнести с известной вероятностью каждый объект к одному из классов. Эту задачу нельзя решить никакими другими методами.

Решение задач дискриминантного анализа осуществляется в статистических пакетах [10, с. 398–429].

3.6. Многомерный корреляционный анализ [9]

Назначение. Многомерный корреляционный анализ, в отличие от парного корреляционного анализа, предназначен для установления взаимосвязей между переменными, число которых больше двух. Такой анализ называют еще множественной корреляцией. В простейшем случае число признаков равно трем (X , Y и Z) и связь между ними линейная. Для установления взаимосвязи вычисляют три коэффициента множественной корреляции, каждый из которых оценивает тесноту линейной связи одной переменной (например, X) с двумя остальными (Y и Z).

Коэффициент линейной связи переменной X с переменными Y и Z обозначается $r_{x(yz)}$. Для его вычисления используется следующая формула:

$$r_{x(yz)} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{yz}^2}},$$

где r_{xy} , r_{xz} и r_{yz} – коэффициенты линейной корреляции Пирсона, вычисленные между соответствующими парами переменных.

Формулы для вычисления коэффициентов множественной линейной корреляции между переменной Y и переменными X и Z ($r_{y(xz)}$), а также переменной Z и парой переменных X и Y ($r_{z(xy)}$) получаются из предыдущей формулы путем перестановки индексов.

Коэффициент множественной линейной корреляции принимает значения от нуля до единицы ($0 \leq r_{x(yz)} \leq 1$), а его значимость оценивают по величине T_ϕ для t -критерия Стьюдента и числа степеней свободы $\nu = n - 3$, где $T_\phi = |r_{эмн}| \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{эмн}^2}}$ и

$r_{эмн}$ – вычисленный коэффициент корреляции.

Для применения множественного корреляционного анализа необходимо соблюдать следующие условия:

- сравниваемые переменные должны быть измерены в метрических шкалах;
- все переменные имеют нормальный закон распределения;
- число варьирующих признаков в сравниваемых переменных должно быть одинаковым.

Если известна линейная связь между парами переменных X и Y , X и Z , Y и Z , то можно установить *частную корреляцию*, которая характеризует линейную корреляционную связь между двумя переменными (например, X и Y) при постоянной величине третьей переменной (Z). Частный коэффициент корреляции между переменными X и Y при постоянной величине переменной Z обозначается $r_{xy(z)}$ и вычисляется по формуле

$$r_{xy(z)} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}}.$$

Заключение переменной Z в скобки ($xy(z)$) означает, что влияние переменной Z на корреляцию между переменными X и Y постоянно. В том случае, если бы влияния переменной Z не было совсем, мы бы получили обычный коэффициент корреляции Пирсона между переменными X и Y .

Пример. В ходе исследования удалось установить значимую отрицательную корреляционную связь между ростом (переменная X) и длиной волос (переменная Y), которую сложно объяснить: люди высокого роста имеют более короткие волосы. Однако если учесть еще один признак – пол (переменная Z) и использовать не линейную, а частную корреляцию, то результат исследования получит закономерное объяснение: мужчины в среднем имеют более высокий рост, чем женщины и длина волос у них в среднем меньше, чем у женщин. После учета переменной «пол» частная корреляция между длиной волос и ростом может оказаться близкой к единице. Таким образом, если существует взаимосвязь между двумя переменными, то это может быть отражением того факта, что они коррелируют с третьей переменной или совокупностью переменных.

Аналогично определяют частные корреляционные зависимости между X и Z (при постоянной переменной Y) и между Y и Z (при постоянной переменной X) путем перестановки соответствующих индексов.

Значимость частного коэффициента корреляции оценивают по величине T_ϕ для t -критерия Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 2$. Условия для применения частного коэффициента корреляции аналогичны условиям для применения множественного корреляционного анализа.

Расчет частного коэффициента корреляции удобно проводить с помощью статистических пакетов [10, с. 258–259].

3.7. Многомерное шкалирование [32]

Назначение. Многомерное шкалирование можно рассматривать как альтернативу факторному анализу, в котором достигается сокращение числа переменных путем выделения латентных (непосредственно не наблюдаемых) переменных, объясняющих связи между наблюдаемыми признаками. Однако подобно кластерному анализу исходной информацией для многомерного шкалирования являются данные о сходстве или близости объектов. Цель многомерного шкалирования – поиск и интерпретация латентных переменных, позволяющих объяснить сходства между объектами, заданными точками в исходном пространстве признаков. Шкала интерпретируется как критерий, лежащий в основе различия (сходства) объектов.

Многомерное шкалирование применимо к более широкому классу исследовательских задач, чем факторный анализ, и имеет ряд преимуществ: а) оно не требует, чтобы исследуемые данные подчинялись закону нормального распределения, а зависимости между ними были линейными; б) в качестве исходных данных этот метод использует произвольный тип матрицы попарных сходств объектов, расстояния или корреляции; в) многомерное шкалирование приводит к проще интерпретируемым результатам.

Основное предположение многомерного шкалирования заключается в том, что существует некоторое метрическое пространство (многомерная шкала) существенных базовых характеристик, которые неявно и послужили основой для полученных эмпирических данных о близости между парами объектов. Эти объекты можно представить как точки в пространстве. При этом более близким объектам соответствует меньшее расстояние в пространстве базовых характеристик.

Это пространство (многомерная шкала) аналогично обычным шкалам в том смысле, что значениям существенных характеристик измеряемых объектов соответствуют определенные позиции на осях пространства. На входе многомерного шкалирования используется матрица, элемент которой на пересечении i -й строки и j -го столбца содержит сведения о попарном сходстве объекта i и объекта j . На выходе многомерного шкалирования получают числовые значения координат, которые приписываются каждому объекту в некоторой новой системе координат (во вспомогательных шкалах, связанных с латентными переменными), причем размерность нового пространства признаков существенно меньше размерности исходного.

Таким образом, многомерное шкалирование – это метод анализа эмпирических данных о близости объектов, с помощью которых определяется размерность пространства существенных для данной содержательной задачи характеристик измеряемых объектов и конструируется конфигурация точек (объектов) в этом пространстве. Оно размещает объекты в пространстве заданной размерности и проверяет, насколько точно полученная конфигурация сохраняет расстояния между объектами. Эти расстояния можно измерить в терминах найденных латентных переменных, например в терминах пары географических координат (широта – долгота).

Пример. Имеются две матрицы попарных расстояний (т.е. сходства признаков) между двумя тройками городов A, B, C и D, E, F . Проанализировав матрицы, нужно расположить точки с координатами городов в пространстве, максимально сохранив реальное расстояние между ними:

	A	B	C
A	0		
B	90	0	
C	90	90	0

	D	E	F
D	0		
E	90	0	
F	180	90	0

В случае городов D, E, F три точки, соответствующие городам-объектам, можно расположить в одномерном пространстве (на прямой) так, чтобы D был удален на 90 км от E и на 180 км от F , а E удален на 90 км от F :

D 90 км **E** 90 км **F**

Если попытаться расположить города A, B и C также на прямой, то сохранить исходную структуру расстояний между ними не удастся. Однако их можно расположить на плоскости (в двумерном пространстве), точно воспроизведя все расстояния, например, в виде равностороннего треугольника:

A
90 км 90 км
B 90 км **C**

Полученное размещение точек на плоскости можно использовать в качестве приближенной географической карты. Эта двумерная карта позволяет намного проще представить себе расположение городов и планировать передвижение между ними, чем при использовании только матрицы попарных расстояний. Однако реальные данные, как правило, не являются такими точными, поскольку содержат случайную изменчивость (шум), влияющую на различие между воспроизведенной и исходной матрицей.

Рассмотренный пример показывает, как конкретная матрица расстояний (сходства) связана с числом латентных переменных (размерностью результирующего пространства).

Многомерное шкалирование активно используется в психологических исследованиях личности. Оно позволяет проанализировать сходства между опре-

деленными чертами характера с целью выявления основополагающих личностных качеств. Широкое распространение этот метод получил также в маркетинговых исследованиях для построения пространственной карты восприятия товаров (услуг), предлагаемых на рынке. Такая карта позволяет увидеть «пустоты», которые фирма может заполнить своим товаром, а также выявить значимые характеристики товара, влияющие на потребительские предпочтения.

Вопросы для самоконтроля:

1. *В каком случае используют многомерные методы статистического анализа?*
2. *Что такое эмпирические математические модели? Приведите примеры.*
3. *Какие интеллектуальные функции выполняют многомерные методы статистического анализа?*
4. *Представьте классификацию методов многомерного статистического анализа по назначению.*
5. *Представьте классификацию методов многомерного статистического анализа по способу сопоставления исходных эмпирических данных.*
6. *Представьте классификацию методов многомерного статистического анализа по виду исходных эмпирических данных.*
7. *Какое предположение лежит в основе факторного анализа?*
8. *Охарактеризуйте метод главных компонент.*
9. *Охарактеризуйте метод собственно факторного анализа.*
10. *Представьте цели, задачи и ограничения факторного анализа.*
11. *Охарактеризуйте этапы факторизации данных.*
12. *Перечислите приемы определения числа факторов.*
13. *Для чего используется вращение факторов? Перечислите варианты вращений.*
14. *Представьте назначение и особенности применения метода кластерного анализа.*
15. *Охарактеризуйте агломеративный метод кластерного анализа.*
16. *Охарактеризуйте итеративный метод кластерного анализа.*
17. *Представьте назначение, задачи и ограничения множественного регрессионного анализа.*
18. *Охарактеризуйте метод логистического регрессионного анализа и его виды.*
19. *Представьте назначение, задачи и ограничения дискриминантного анализа.*
20. *Представьте назначение, задачи и ограничения множественного корреляционного анализа.*
21. *Дайте характеристику частной корреляции.*
22. *Охарактеризуйте метод многомерного шкалирования.*

Тема 16 Математические модели в психологии

План:

1. История применения математических методов в психологической науке.
2. Методологические проблемы использования математики в психологии.
3. Проблема математического моделирования психики. Виды и функции моделей.
4. Основные направления моделирования в психологии.
5. Математическое моделирование психических явлений. Нетрадиционные методы моделирования.
6. Компьютерные методы математико-статистической обработки результатов психологических исследований.
7. Нормативы представления результатов анализа данных в научной психологии.

Основные понятия и термины: *модель, моделирование, психологическая модель, математическая модель, психологическое моделирование, моделирование психики, описательные модели, действующие модели, компьютерное моделирование, нетрадиционные методы моделирования, универсальные статистические пакеты, математические пакеты, табличные процессоры и базы данных.*

1. История применения математических методов в психологической науке [28; 29]

Существует мнение, неоднократно высказывавшееся учеными прошлого и разделяемое современными исследователями, что область знаний становится наукой лишь тогда, когда она начинает применять математику. Для обоснования этой точки зрения приводились следующие доводы:

- а) математика позволяет количественно сравнивать явления;
- б) математика позволяет проверять правильность словесных утверждений;
- в) математика позволяет прогнозировать будущие события и т.д.

Впервые математическую логику и символику в своей системе умозаключений (силлогизмов) использовал еще Аристотель. В XVII веке немецкий математик Г. Лейбниц создал новый универсальный язык для описания мыслительных операций. Однако активное проникновение математических методов в психологию связано с развитием экспериментальных и прикладных исследований в психологии.

В 1822 году немецкий педагог и психолог И.Ф. Герbart выступил в Королевском Немецком обществе с докладом «О возможности и необходимости применять в психологии математику». В нем ученый утверждал, что, если психология хочет быть наукой, подобно, например, физике, в ней можно и нужно применять математику. В книге «Психология как наука, заново основанная на опыте, метафизике и математике», вышедшей в 1824 году, И.Ф. Герbart отметил, что элементами душевной жизни человека являются представления. Они

сменяют друг друга, образуя поток представлений в сознании. Свойства этого потока, являясь величинами, могут быть измерены. Он предложил математико-психологическую модель для описания динамики представлений:

$$\varphi = \alpha \times (1 - e^{-\beta t}),$$

где φ – скорость изменения представлений за время t , α и β – постоянные величины.

Эта модель вполне корректна, но не подтверждена и не опровергнута эмпирическим путем.

Идеи И.Ф. Гербарта были развиты его учеником, математиком и философом М.В. Дробишем. В 1842 году в Лейпцигском университете вышла его книга «Эмпирическая психология согласно естественнонаучному методу», в которой излагалась система понятий о характеристиках потока представлений в сознании как взаимосвязанных величинах. В 1850 году М.В. Дробиш опубликовал работу «Первоосновы математической психологии», содержащей примеры численного моделирования представлений. Эти идеи Дробиша были подхвачены в психологии только во второй половине XX века, после активного внедрения компьютерной техники.

В дальнейшем основными направлениями применений математики в психологии стали психологические измерения, описательные модели и математические методы обработки данных.

Психологические измерения начались в 60-х годах XIX века и велись в двух направлениях:

1) психофизиологические исследования в немецкой экспериментальной психологии. Так Т. Фехнер и В. Вундт занимались измерением связи между интенсивностью стимула и силой ощущения, времени реакций. Эти исследования мало отличались от исследований, например в физике, и хорошо описывались математическими моделями элементарных функций. Примером таких измерений является основной психофизиологический закон Вебера-Фехнера:

$$E = k \times \log P + c ,$$

где E – интенсивность ощущения, P – интенсивность раздражителя, k , c – постоянные.

2) антропологические исследования в Англии. Ф. Гальтон, К. Пирсон исследовали размеры тела, умственные способности и другие свойства человека. Это потребовало создания особых тестовых методов и разработки специального математического аппарата для обработки данных – корреляционного, регрессионного и факторного анализа.

Эти идеи получили большое распространение в начале XX века во Франции, США, России. Во Франции А. Бине и Т. Симоном были разработаны тесты, диагностирующие умственные способности. В США адаптация этих тестов привела к появлению понятия «коэффициент интеллектуальности» (IQ), который предложил У. Штерн:

$$IQ = \frac{\text{умственный_возраст}}{\text{хронологический_возраст}} \times 100\% .$$

Все эти исследования способствовали становлению психологического тестирования, что повлекло за собой развитие психологических измерений и методов их обработки.

Ч. Спирмен разработал основные положения корреляционного анализа, отметив, что корреляции не выражают взаимовлияния переменных, причинно-следственных связей между ними. Он утверждал, что существует «генеральный фактор», определяющий совместную изменчивость переменных. Ученый разработал метод выявления этого фактора по корреляционной матрице – первый метод факторного анализа.

Л. Тернстоун дополнил этот метод, предположив, что на изменчивость переменных влияет не один, а несколько факторов. Он предложил метод многофакторного анализа, основанный на применении линейной алгебры, который впоследствии стал общенаучным методом анализа данных. Р. Фишер создал метод дисперсионного анализа, который стал одним из основных в психологии (особенно в генетической).

После второй мировой войны под влиянием новых математизированных теорий управления техническими и социальными системами в зарубежной психологии появились математические теории приема и переработки информации человеком, сенсомоторного управления, речевых коммуникаций и принятия решений, поведения и научения; были пересмотрены психофизические и психометрические модели и методы. Все это способствовало становлению математической психологии как науки о математических моделях в психологии.

В российской психологии Г.И. Россомо (1910) предложил методику «Психологические профили» – особую психометрическую шкалу для фиксации и анализа многомерных измерений уровня развития (общих способностей).

Г.И. Челпанов в 1912 году разработал первое пособие, в котором изложил основы методов статистической обработки данных эксперимента. Эти идеи подхватил Н.Я. Гротт, проводивший теоретические исследования психологических основ математики и разработавший математико-психологические модели психических процессов с помощью символьных обозначений (дискриптивные модели).

С 1936 года исследования в области прикладной психологии в СССР прекратились, что было обусловлено выходом Постановления ВКП(б) «О педологических извращениях в системе наркомпроса». Только в 1959 году на базе Ленинградского университета была открыта лаборатория индустриальной психологии, в которой особое внимание уделялось проблемам применения математики в психологии.

2. Методологические проблемы использования математики в психологии [28; 29]

Возможность применения математических методов в психологии на современном этапе развития науки не вызывает сомнения. Однако вопрос о необходимости их применения до сих пор является спорным. Дискуссии ведутся по трем основным позициям.

Первая позиция связана с возможностью описания психологической реальности математическими средствами. Противники использования математических методов утверждают, что психологическое содержание нельзя выразить математическими средствами из-за специфичности предмета психологии – психики. Сторонники применения методов математики в психологии уверены, что математика может предложить модели, которые способны описать содержание любой науки.

И те, и другие частично правы. Психологическая реальность может изучаться с помощью математических средств, которые позволяют более четко описывать изучаемые объекты, с помощью количественного сравнения выявлять скрытые за наблюдаемыми феноменами причины и закономерности происходящего. При этом математические средства не должны заменять психологическое содержание, в оформлении которого они играют важную, но вспомогательную роль. В противном случае могут появляться формально правильные, но психологически неадекватные модели. Примером удачного математического представления связи между зависимой переменной (интенсивность ощущения) и независимой переменной (интенсивность раздражителя) является закон Вебера-Фехнера, в котором математическая сторона оказывается на заднем плане.

Второй позицией для споров выступает адекватность использования математических методов в психологической науке. Противники применения методов математики убеждены, что существующие математические методы неадекватны для психологии, поскольку они разрабатывались для потребностей естественно-научных дисциплин, объекты изучения которых не сопоставимы по сложности с объектами психологических исследований. Сторонники использования математических методов утверждают, что в современной математике достаточно методов, пригодных для психологических исследований, психологам нужно лишь их освоить и научиться применять.

В математике в процессе исторического развития появились различные направления, которые отличаются возможностями применения в других науках, в том числе и в психологии. Так, дискретная математика оперирует целочисленными, неделимыми объектами, а «конечная» – изучает объекты, ограниченные в количественном отношении (например, размеры тела или способности человека). «Качественная» математика изучает абстракции без количественной определенности (структуру или формы объектов). «Содержательная» математика соединяет в себе черты конечной и качественной математик, что позволяет отражать содержание реальных объектов (например, особенности человеческого мышления). Психологу необходимо, исходя из своих психологических задач, подбирать те математические средства, которые в количественном и качественном отношении будут адекватными для описания психологических феноменов, обработки экспериментальных данных и оценки полученных результатов.

Математический аппарат будет адекватен, если он выражает все свойства, которые интересуют исследователя, и неадекватен в противном случае. Мерой неадекватности может служить количество «потерянных» свойств объекта исследования. Например, метод случайной выборки является адекватным для про-

стых однородных наблюдений за сенсомоторной реакцией определенного вида, но неадекватным для изучения многомерных разнородных по составу совокупностей психических свойств или социальных общностей. В этом случае адекватен метод моделирования совокупности и проектирования пропорциональной выборки из нее.

Третья спорная позиция касается описательных (дискриптивных) моделей, в которых математическая символика и функциональная запись используется в общем виде без эмпирического подтверждения. Примером такой модели является формула П.В. Симонова, которая выражает связь между эмоциями (\mathcal{E}), потребностями (Π), необходимой и существующей информацией (I_n и I_c):

$$\mathcal{E} = f[\Pi \cdot (I_n - I_c)].$$

Противники использования математических методов в психологии считают, что эти символы вносят путаницу и не имеют смысла, поскольку являются неverifiedируемыми. Сторонники применения методов математики в психологии утверждают, что дискриптивные модели ориентируют психологов, направляя их на исследование определенных величин и установление возможных зависимостей, которые необходимо эмпирически установить и теоретически обобщить.

Общую методологическую схему применения математических методов в психологии можно представить в виде последовательности из четырех этапов, которые организованы в цикл. На каждом из этапов этого цикла осуществляется определенная интерпретация (содержательная или формальная) [28].

На первом этапе происходит психологический анализ и формализация объекта изучения, т.е. от теоретических положений переходят к операционально определяемым понятиям и эмпирическим процедурам (психолого-психологическая интерпретация).

Второй этап заключается в выборе необходимого математического метода эмпирического исследования и его реализации (психолого-математическая интерпретация).

Содержание третьего этапа представляет собой математические преобразования, т.е. обработку данных и статистическую проверку психологических гипотез (математико-математическая интерпретация).

На четвертом этапе осуществляется содержательная, качественная интерпретация полученных количественных результатов обработки данных (обратная математико-психологическая интерпретация).

Цикл замыкается, исследователь может переходить к решению следующей задачи, либо, уточнив предыдущую задачу, повторить исследование. Таков научно-исследовательский цикл в любой психологической отрасли.

3. Проблема математического моделирования психики. Виды и функции моделей [10; 20]

С середины XX века в самых различных областях человеческой деятельности стали широко применять математические методы и ЭВМ. Возникли новые

дисциплины (в том числе математическая психология), изучающие математические модели соответствующих объектов и явлений, а также методы исследования этих моделей.

Модель – это специальное представление какого-либо объекта, воспроиздающее его существенные черты.

Моделирование – это процесс построения моделей, а также метод познания объектов через их модели. Потребность в моделировании возникает тогда, когда исследование самого реального объекта невозможно или затруднено в силу его недоступности, этических ограничений или чрезмерных затрат (временных, финансовых и т.д.). Моделируемыми объектами в психологии выступают психика (с ее психофизиологическими механизмами), личность, деятельность, общение, поведение.

Использование метода моделирования в психологии обладает рядом особенностей, которые обусловлены следующими факторами:

а) спецификой предмета исследования (психики), которая заключается в идеальности, латентности и сложности. В связи с этим любая презентация психики в форме модели весьма условна и требует доказательств своей адекватности. Кроме того, спроектировать психику можно, опираясь только на ее внешние проявления, поэтому необходимо обосновать соответствие объективно наблюдаемых проявлений психики субъективным процессам, протекающим во внутреннем пространстве индивида;

б) особенностями носителя психики (человека), что требует соблюдения этических норм взаимодействия исследователя с испытуемым, предельной гуманности ко всем приемам его изучения. Отсюда вытекают значительные ограничения, налагаемые на средства и процедуру моделирования (например, моделирование психогенных ситуаций травмирующего характера);

в) концептуальными основами исследования, мировоззренческими установками исследователя и господствующей научной парадигмой, которые определяют взгляд на сущность психики, личности, поведения и на возможности их изучения, а также обуславливают выбор направления, методов и средств их изучения, в том числе и моделирования. Например, сторонники поведенческих теорий вряд ли займутся моделированием структуры личности;

г) своеобразием языка психологической науки, которое заключается в субъективности и неоднозначности психологической терминологии, что предопределено предметом психологии. Это значительно осложняет и без того непростую проблему согласования языков в компьютерном моделировании, где перевод психологических терминов на логико-математический язык программы и обратно предъявляет повышенные требования к унификации и формализации психологического словаря.

Модель может успешно замещать моделируемый объект, если она соответствует следующим требованиям:

- универсальность характеризует полноту отображения моделью изучаемых свойств реального объекта;

- адекватность – способность отражать нужные свойства объекта с погрешностью не выше заданной;

- точность – оценивается степенью совпадения значений характеристик реального объекта и значений этих характеристик, полученных с помощью моделей;

- экономичность – определяется затратами ресурсов памяти ЭВМ и времени на реализацию и эксплуатацию модели.

В зависимости от характера получаемого знания модели могут выполнять следующие функции:

а) на эмпирическом уровне:

- реконструирующую (воссоздание качественной специфики объекта);

- измерительную (получение количественных характеристик объекта);

- описательную (обеспечение наглядности и понятности);

б) на теоретическом уровне:

- интерпретационную (объяснение, обобщение и описание объекта);

- прогнозирующую (предсказание поведения объекта-прототипа);

- критериальную (проверка истинности, адекватности знаний об объекте);

- эвристическую (способствование генерированию новых идей и гипотез относительно изучаемого объекта и его взаимосвязей).

В науке предложено немало разновидностей моделей, которые можно классифицировать по разным основаниям. Выбор модели определяется теми задачами, которые стоят перед исследователем.

По способу реализации модели подразделяются на следующие виды:

а) вещественные модели, которые выполняются из осязаемых предметов и представляют собой физическое воплощение оригинала (макеты, муляжи и т.д.). Близкое по смыслу содержание вкладывается в понятие «физическая модель», которую противопоставляют модели идеальной и рассматривают как частный случай материальной, включающей в себя еще и геометрические, и компьютерно-математические модели;

б) знаковые (логико-математические, абстрактные, формальные) модели представляют объект-оригинал посредством условных обозначений и выполнены в графической форме (рисунки, графики, чертежи, формулы, буквенно-словесные описания, специальные изображения и т. п.);

в) образные модели – идеальное представление изучаемых объектов в сознании человека. Это образы памяти и воображения (т.е. представления), в которых совмещена информация, полученная с помощью непосредственного чувственного восприятия и абстрактно-логического мышления. Поскольку образы можно трактовать как знаки, то некоторые авторы образные модели относят к знаковым;

г) ситуационные модели – это искусственное представление реальных обстоятельств существования естественного объекта, обуславливающих его появление, развитие, функционирование или исчезновение. В отличие от других видов моделей эти модели имитируют не сам изучаемый объект, а условия его су-

ществования. Например, представление психогенных ситуаций с помощью памяти или воображения.

По *характеру воспроизводимых сторон оригинала* выделяют:

а) субстанциальные модели – это модели, чей материальный субстрат по своим основным свойствам идентичен субстрату оригинала. Например, животное как биологическая модель человека, группа как модель человеческого общества;

б) структурные модели, которые имитируют внутреннюю организацию объекта-прототипа либо в «статическом», либо в «динамическом» плане. К структурным моделям первого типа, в которых воспроизводятся пространственные соотношения качественно своеобразных частей объекта, относятся модель атома, модели структуры личности и психики и т. п. Структурные модели второго типа – это искусственное представление процессов (стабильных и нестабильных), в которых отражаются временные и энергетические стороны объектов. Например, формулы химических реакций, социально-психологические эксперименты и тренинги как модели процесса общения;

в) функциональные модели, имитирующие способы взаимодействия объекта со средой, т. е. поведение. Примерами моделей этого вида являются формула бихевиоризма «стимул – реакция», соотношение экспериментальных переменных. Сам лабораторный эксперимент есть модель «жизненных» ситуаций, а действия испытуемого – модель его поведения в этих ситуациях;

г) смешанные модели – это функциональные модели, которые демонстрируют еще и структуру объекта. Примерами таких моделей в знаковой форме выступают: принципиальная схема работы функциональных систем по П.К. Анохину, схемы сенсорных систем (анализаторов) и т.д. Смешанными вещественными моделями являются различные компьютерные реализации психических функций, например, искусственный интеллект.

По *полноте представления объекта* модели бывают:

а) полные, которые реализуют максимально возможное число свойств и элементов объекта-прототипа, необходимых в контексте данного исследования. Если же модель идентична оригиналу по всем параметрам, то можно говорить о его воспроизведении, что в экспериментальной практике нецелесообразно;

б) неполные – это модели, которые обладают только частью свойств оригинала, как правило, наиболее существенных для решения задач исследования.

Модели, получаемые в *определенных сферах деятельности* человека, подразделяют по названиям соответствующих областей знания: технические, социальные, психологические, математические модели и т.д.

Психологическая модель – это аналог психики и ее проявлений различной степени соответствия (приближения).

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики.

Средством построения математических моделей являются математические методы многомерного анализа: кластерный анализ и многомерное шкалирование (модели классификации и семантических пространств), факторный анализ, регрессионный анализ (модели латентных структур) и т.д.

4. Основные направления моделирования в психологии [20]

В самом общем плане моделирование в психологии представлено двумя принципиальными направлениями: *моделирование психики* – искусственное конструирование психики и ее различных проявлений – и *психологическое моделирование* – искусственное создание специальных условий для проявления психики индивидов, социальных групп, животных. Оба направления позволяют изучать структуру, функции и механизмы работы психики, ее проявлений в различных формах и в различных условиях. Схематично систему основных направлений моделирования в психологии можно представить следующим образом:

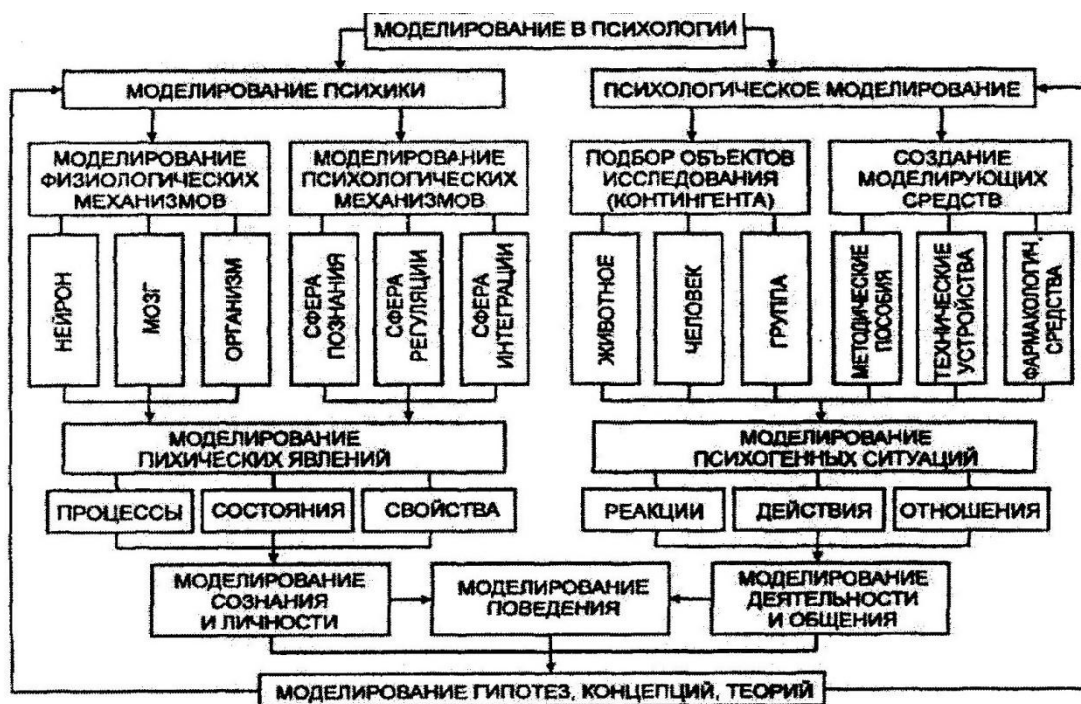


Рис. 16. Схема основных направлений моделирования в психологии

Психологическое моделирование заключается в искусственном создании специальных условий, провоцирующих нужные ответные реакции, действия или отношения испытуемых. Сопоставляя исходные условия с параметрами поведения индивида, можно:

- а) получать косвенные данные о функционировании психики, которые могут быть использованы для ее изучения и моделирования;
- б) выявлять корреляционные, причинно-следственные, а иногда и функциональные связи между психогенными воздействиями и особенностями поведения, что позволяет установить психологические закономерности;
- в) разрабатывать эффективные приемы воздействия на людей с целью оказания им психологической помощи.

Примером психологического моделирования является психотренинг, позволяющий моделировать индивидуальное и групповое поведение.

Суть моделирования психики состоит в проектировании и конструировании искусственных аналогов различных психических явлений и лежащих в их осно-

ве нейрофизиологических и психологических механизмов. Моделирование психики осуществляется по двум направлениям: через создание описательных моделей и построение действующих моделей.

Представители первого направления рассматривают психику как специфический способ отражения реальности и поэтому исследуют ее, опираясь на психологические факты, которые получают через интерпретацию внешнего поведения субъекта. Анализируя поведение (следствие), исследователи описывают психику (причина). Модели-описания, которые являются теоретическими обобщениями эмпирического материала, представляются в знаковой форме (словесной, графической или математической). Конечной целью исследователей является построение теорий психического отражения и личности, позволяющих повышать эффективность психологической помощи, совершенствовать процессы образования и т.д.

Исследователи, представляющие второе направление, рассматривают психику как свойство нервной системы (мозга), поэтому организуют ее изучение через обращение к материальному субстрату. Сконструировав модель субстрата и смоделировав его деятельность, ученые получают психические явления, аналогичные результатам функционирования мозга. Таким образом, создавая действующую модель, исследователи идут от причины (мозг и психика) к следствию (поведение). Конечной целью представителей этого направления является разработка устройств, способных помочь человеку или заменить его в различных видах деятельности (например, ЭВМ, играющие в шахматы или выполняющие определенные технологические операции).

Через модели-описания реализуется преимущественно моделирование психологических механизмов. Моделирование физиологических механизмов осуществляется в основном через создание действующих моделей.

Действующие модели – это технические устройства, которые с определенной степенью приближения выполняют функции психики или ее физиологического субстрата (головного мозга, его отдельных областей, нервной клетки). Поскольку в роли таких устройств, как правило, выступают компьютеры, то создание действующих моделей называют *компьютерным моделированием*. Компьютерные программы, которые обеспечивают функционирование действующей модели, представляют собой алгоритм действия ЭВМ, заданный на языке математики (т.е. в знаково-символической форме). Они рассматриваются как самостоятельные математические модели, которые играют роль связующего звена между моделями описательными и действующими.

5. Математическое моделирование психических явлений. Нетрадиционные методы моделирования [10; 20]

Математическая модель в психологии используется для приближенного описания психики и ее различных проявлений с помощью математических средств. Для построения математической модели изучаемого объекта или явления выделяют те его особенности, черты и детали, которые, с одной стороны, содержат более или менее полную информацию об объекте, а с другой стороны,

допускают математическую формализацию. Математическая формализация означает, что особенностям и деталям объекта можно поставить в соответствие подходящие адекватные математические понятия: числа, функции, матрицы и т.д. Тогда связи и отношения, обнаруженные между отдельными частями изучаемого объекта или между различными объектами можно записать с помощью математических отношений: равенств, неравенств, уравнений. В результате получается математическое описание изучаемого процесса или явления (его математическая модель).

Наиболее плодотворными стали исследования в области математического моделирования физиологических основ психики. Первые идеи теории автоматов, способных моделировать психические процессы и поведение, были изложены в 1943 году У. Маккалоком и У. Питерсом. Они доказали принципиальную возможность построения с помощью методов математической логики действующих моделей-автоматов, которые имитируют работу нейронных сетей.

Всплеск работ по математическому и компьютерному моделированию произошёл в 50–60-х годах прошлого века. Он связан с развитием вычислительной техники и кибернетики (от греческого «*kybernetike*» – искусство управления) – науки об общих закономерностях процессов и систем управления в технических устройствах, живых организмах, человеческих организациях. Для решения психологических задач стали активно использовать понятия и идеи теории информации и кибернетики. При этом функционирование психики объяснялось функциональными системами мозга и изображалось в виде функциональных схем, принятых в технической кибернетике. Психические процессы рассматривались как аналоги процессов приема, переработки и передачи информации. В результате были предприняты попытки создать с помощью компьютера «искусственный интеллект» – модель интеллекта человека.

Вначале, опираясь на информационный подход, была смоделирована работа нейрона, который представлялся как элемент с несколькими входными и одним выходным информационными каналами, который действует по принципу работы реле: «да» – «нет» (двоичный код). Поскольку модель нейрона, как и сам отдельный нейрон, не способна дать «на выходе» психический эффект (например, в виде узнавания, предпочтения), были предприняты попытки создать модель, имитирующую работу совокупности взаимодействующих нейронов – нейронную сеть. Наиболее известной моделью нейронных сетей являются перцептроны Ф. Розенблатта. Это технические устройства, созданные на основе вероятностного метода, которые выполняют функции восприятия и памяти. Перцептроны обладали умением распознавать несложные объекты (например, буквы алфавита) и их вариации (т.е. производить классификацию), а также способностью к обучению. В дальнейшем, основываясь на принципе работы перцептрона, были созданы универсальные компьютерные программы, обучающиеся медицинскому и техническому диагнозу, интерпретации геофизических данных, прогнозированию погоды и т.д.

Наибольшие успехи на пути имитации нейрофизиологических механизмов были достигнуты при моделировании восприятия, памяти и мышления.

Моделирование восприятия (точнее, опознавания) базировалось на возможностях машины распознавать образы, соотносить новые признаки с уже известными, сходными и строить аналогии, опираясь на способности к абстрагированию. Технически эти идеи были реализованы для зрительной и слуховой модальностей в виде технических устройств, воспринимающих речь как письменную, так и звуковую. К ним относятся разработанные зарубежными учеными «читающие» и «слушающие» машины, а также созданные российскими авторами «динамический анализатор» и «слушающий автомат».

В тесной связи с моделированием восприятия развивалось и моделирование памяти. Основываясь на теории информации, были предприняты попытки имитации двух видов памяти (долговременной и кратковременной), а также трех мнемических операций (запоминания, хранения и воспроизведения информации). Технически мнемические операции в ЭВМ реализовывались по принципу, аналогичному для перцептронов (с помощью двоичного кода). Однако при этом возникли трудности, связанные с неопределенностью мозговой локализации мнемических процессов, а также обусловленностью всех мнемических операций личностными особенностями человека.

Наибольший интерес исследователей вызвало моделирование мышления, которое рассматривалось как целенаправленная переработка информации, осуществляемая в форме решения задачи. Первую модель устройства, осуществляющего арифметические операции (арифмометр), разработал в середине XIX века Т. де Кольмар. Усовершенствованный вариант арифмометра был предложен в 1878 г. русским математиком П.Л. Чебышевым. В 1904 г. А.Н. Крылов разработал проект машины, способной решать дифференциальные уравнения.

В 50-х годах XX века американские ученые А. Ньюэлл, Г. Саймон и Дж. Шоу впервые смоделировали интеллектуальный процесс решения задачи на цифровой вычислительной машине. Их программа основывалась на алгоритмах сравнения и подобия и заключалась в последовательном переходе от одной подпроблемы к другой, пока не будет решена основная проблема или не будет нарушено одно из ограничений программы. Позже этими же авторами была разработана программа «Общий решатель задач», в которой пересмотр подпроблем осуществлялся не последовательно, а по оптимальному пути.

После этого появляются программы эвристического характера. Г. Гелентор предложил программу решения геометрических задач с элементами самообучения. У. Рейтман и М. Санчес разработали программу «Композитор». Дж. Кларксон создал программу, моделирующую работу банковского консультанта по покупке акций. Все эти программы основаны на совмещении моделирования физиологических и психологических механизмов.

Трудности моделирования мышления, с одной стороны, обусловлены недостаточной изученностью процесса мышления и неопределенностью локализации мыслительных процессов, а с другой – различиями в психологическом и информационно-кибернетическом аспектах мышления. В кибернетике исходят из положений, что содержание сообщения несущественно для проблемы переда-

чи информации и что количество информации не может возрасти в процессе ее передачи. В психологическом плане эти положения совершенно не верны. Поэтому моделируются в основном логическое и репродуктивное мышление. Даже так называемое «эвристическое программирование», опирающееся на вероятностные факторы, не может имитировать ни интуитивное, ни творческое мышление.

В психологической науке предпринимаются попытки моделирования регуляторных процессов психики (эмоций, мотивации, воли). Трудности в создании моделей эмоциональной и мотивационной сфер обусловлены тем, что в них компонент переживания, который значительно преобладает над компонентом знания, плохо поддается формализации и не вписывается в информационные модели.

Несмотря на ограничения компьютерного моделирования и трудности, связанные с определением понятия «личность», в психологии предпринимаются попытки создания действующих моделей личности. Самой известной из них является модель Дж. Лоулина, названная им «Личность Олдос». Программа Олдоса состоит из 750 команд, реагирующих на вводимые в ЭВМ данные-ситуации, и позволяет регистрировать его «действия», «настроения», «эмоции», «мнения», которые зашифрованы в семизначном коде данных.

Дальнейшее развитие моделирования познавательных возможностей человека привело к формированию самостоятельного направления в науке – моделированию искусственного интеллекта. Теоретики искусственного интеллекта дают различные определения этого понятия, соответственно которым в исследованиях выделяются две основные цели: 1) создание программ для автоматизации интеллектуальной человеческой деятельности (П. Уинстон); 2) использование программ искусственного интеллекта для объяснения процессов, протекающих у человека при решении тех или иных задач (Н. Нильсон, Т. Фейген).

Исследования в этой области начались в Институте Карнеги с создания машинных программ, решающих задачи. В это же время разрабатывались программы классификации, позволяющие осуществлять распознавание образов. При этом использовались аналогии, которые характерны для биологических процессов, например, функционирование организованной сети нейронов (модель перцептрона). Модели такого класса позволили представить механизм связи между ситуациями и ответными реакциями при научении, а также выделить типы научения. Позднее под содержанием понятия «искусственный интеллект» стали понимать не только распознавание образов и решение задач, но и принятие решений, игры, адаптивное программирование, обработку данных на естественном языке и т.д. В работах ряда исследователей искусственный интеллект стал рассматриваться скорее как расширение математики, а не как поддисциплина математической психологии.

В 90-х годах XX столетия определились новые парадигмы в исследовании искусственного интеллекта. Первая – теория однородных сред, элементами которых являются устройства, подобные нейронам. Вторая – компьютерная гра-

фика, помогающая решать задачи с помощью образного мышления. Когнитивная интерактивная компьютерная графика рассматривается как средство воздействия на правополушарное мышление человека в процессе научного творчества. Третья – экспертные системы, касающиеся представлений знаний и манипулирования ими.

Несмотря на огромный объем разработок в этой области, пока не предложено модели интеллекта, которая соответствовала бы представлениям современной науки. Этот факт может быть обусловлен следующими причинами: во-первых, недостаточной разработанностью в науке категории «интеллект»; во-вторых, ограниченными возможностями информационного подхода в психологии, который не позволяет воспроизвести высшие психические функции человека ни по отдельности, ни, тем более, в их единстве.

Однако многие концепции искусственного интеллекта, несомненно, повлияли на развитие психологической науки, например, содействуя появлению *нетрадиционных методов моделирования*. К ним относятся теория размытых множеств и синергетический подход.

Моделирование на «размытых» множествах связано с приписыванием элементу некоторой числовой оценки, которая объясняется не объективной или субъективной вероятностью, а трактуется как степень принадлежности элемента к тому или иному множеству. Множество таких элементов называется «нечётким», или «размытым», множеством.

Например, каждое слово x естественного языка можно рассматривать как сжатое описание нечёткого подмножества $M(x)$ полного множества области рассуждений U , где $M(x)$ есть значение x . Тогда весь язык можно рассматривать в качестве системы, в которой нечётким подмножествам множества U приписываются элементарные или составные символы (т.е. слова, группы слов и предложения). Так, если цвет объекта – это некоторая нечеткая переменная («лингвистическая» переменная), то значения этой переменной (красный, синий, жёлтый, зелёный и т.д.) можно интерпретировать как символы нечётких подмножеств полного множества всех объектов. Психологическое оценивание будет более адекватным, если использовать «лингвистические» переменные вместо числовых переменных или в дополнение к ним; отношения между переменными описывать «нечёткими» («размытыми») высказываниями, а сложные отношения описывать «нечёткими» алгоритмами.

Ещё одна альтернатива традиционному математическому моделированию – синергетический подход, суть которого заключается в следующем. Беспорядок в системе может предшествовать появлению новой структуры, в то время как стохастические системы имеют низкую вероятность порождения интересных структур. Поэтому поведение необходимо описывать с помощью аperiодических, непредсказуемых временных рядов, не ограничиваясь при моделировании стохастическими (вероятностными) процессами. Именно аperiодические решения детерминированных уравнений, которые описывают самоорганизующиеся структуры, помогут прийти к пониманию сложных психологических механизмов са-

моорганизации. Так, в противовес традиционным моделям психотерапии, основанным на концепции равновесия, разрабатываются модели, основанные на определенных аспектах теории хаоса (например, выделяется феномен хаотического в психофизиологической саморегуляции).

6. Компьютерные методы математико-статистической обработки результатов психологического исследования [18]

Применение многомерных методов требует соответствующего программного обеспечения. Выделяют три группы средств компьютерной статистической обработки результатов психологического исследования.

Первая группа – *универсальные статистические пакеты*. Пакетом называется система программных средств, предназначенная для решения определенного класса задач. Статистический пакет позволяет решать задачи статистического анализа данных.

Широко известны и распространены универсальные статистические программы STATISTICA и SPSS (от англ. «Statistical Package for Social Science» – статистический пакет для социальных наук), STADIA, Statgraphics и др., содержащие практически весь спектр статистических методов от простейших до самых современных. Эти многоцелевые статистические пакеты включают ряд различных способов анализа, что позволяет успешно использовать их в любых отраслях науки. Кроме базового программного ядра, охватывающего наиболее распространенные статистические операции, существует несколько десятков программных модулей для решения прикладных задач. Например, программа Answer Tree предназначена для составления высокоточных маркетинговых прогнозов.

Статистические пакеты позволяют исследователю:

- использовать весь набор методов математической статистики;
- быстро обрабатывать большие массивы данных;
- представлять и редактировать полученные результаты в виде наглядных отчетов;
- не писать программы и не работать с отдельными файлами.

Возможности всех пакетов примерно одинаковы, их выбор определяется личными предпочтениями пользователей, которые отмечают хорошую графику и гибкость в обработке данных программы STATISTICA. В качестве преимуществ программы SPSS пользователи указывают не только простоту освоения и применения, но и наличие ряда методов, отсутствующих в STATISTICA (например, варианты многомерного шкалирования).

Вторая группа средств, используемых для компьютерной статистической обработки данных, – это *математические пакеты*. Они позволяют решать задачи из конкретной области науки. К наиболее известным математическим пакетам относятся программы Matcat, Mathematika, Matlab. Например, программа Matcat дает возможность производить операции над числами, векторами, матрицами, строить графики, вычислять дифференциалы и интегралы, представлять

выражения в виде суммы элементарных дробей, раскладывать выражения на множители и т.д. В отличие от статистических пакетов, математические пакеты требуют работы с файлами.

К третьей группе средств компьютерной обработки данных относятся *табличные процессоры* и базы данных. Они позволяют вычислять простейшие математические и статистические функции, представлять результаты графически. Как и математические пакеты, табличные процессоры требуют работы с файлами. Примером средств этой группы является программа Microsoft Excel.

Статистическая обработка данных с помощью Excel может проводиться тремя способами:

- с помощью статистических функций Мастера функций Microsoft Excel;
- с помощью пакета анализа данных, имеющихся в Microsoft Excel;
- путем программирования необходимых формул самим пользователем.

В настоящее время разрабатываются программные продукты, ориентированные на пользователей, которые создают собственные процедуры и методы обработки данных. Новые программы включают в себя средства для макропрограммирования графических, математических и статистических процедур.

7. Нормативы представления результатов анализа данных в научной психологии [10]

Современное научное знание, являясь информационно насыщенным, предъявляет особые требования к нормативам представления результатов научных исследований, в том числе психологических. Экспериментальные факты научной психологии нуждаются в четком методологическом обеспечении, которое базируется на математико-статистическом обосновании данных и имеет следующую структуру:

- результаты психологических исследований, представленные в виде:
 - а) классификаций; б) одно- или многомерных изображений; в) базы теоретических и экспериментальных данных;
- база данных по исследовательским средствам (наблюдение, эксперимент, математические и физические модели и т.д.);
- база данных по психологическим теориям и теориям, разработанным в смежных дисциплинах;
- логические и языковые средства построения теоретического описания экспериментальных данных;
- математико-статистические методы, позволяющие эффективно интерпретировать новые экспериментальные данные.

Такая структура позволяет обеспечить точность и четкость научных фактов, подтвердить справедливость выдвинутой идеи, достоверно отражающей реальную картину.

Завершением исследовательской работы является научный текст, который оформляется в соответствии со следующими нормативами:

- все понятия и суждения в пределах текста должны носить однозначный характер, исключать неопределенность;

- в тексте должна соблюдаться последовательность и непротиворечивость в изложении материала;
- в научной работе должны быть приведены достаточные основания, подтверждающие истинность выводов;
- тезис доказательства должен быть сформулирован ясно, четко и недвусмысленно;
- в ходе доказательства недопустима подмена тезиса;
- используемые в научной работе аргументы должны быть истинными, убедительными, достаточными и автономными;
- в ходе аргументирования недопустим переход от узкой области к более широкой, от условно существующего факта, явления – к безусловному.

Различают две основные формы представления результатов исследования в виде научного текста – квалификационная и научно-исследовательская работы.

Квалификационная работа – курсовая работа, дипломное исследование, диссертация и т.д. – служит для того, чтобы по результатам заключения экспертов автор получил документ, удостоверяющий уровень его компетентности. Требования к оформлению и представлению результатов таких работ изложены в инструкциях (ВАКа) и положениях, разрабатываемых вузом.

Научно-исследовательская работа (научный отчет) – это документ, содержащий подробное описание методики, хода исследования, результатов и выводов, полученных в ходе исследования. Под описанием понимается любая форма представления информации о полученных результатах: вербальная форма (текст, речь, аудио- и видеофайлы), символическая форма (формулы, знаки), графическая форма (схемы, графики, диаграммы), предметно-образная форма (макеты, вещественные модели, фильмы и др). Итогом обработки данных эксперимента является аналитическое описание полученных зависимостей между независимыми и зависимыми переменными.

Вопросы для самоконтроля:

1. *Охарактеризуйте вклад немецких ученых в «математизацию» психологии.*
2. *Как идеи математики использовались в психологических измерениях?*
3. *Представьте связь психологического тестирования и математических методов.*
4. *Охарактеризуйте вклад русских ученых в исследование проблем применения математики в психологии.*
5. *Представьте основные спорные позиции сторонников и противников применения математических методов в психологии.*
6. *Охарактеризуйте общую методологическую схему применения математики в психологии.*
7. *Что такое модель?*
8. *Какие требования предъявляются к модели?*
9. *Какие функции выполняет модель?*

10. Представьте классификацию моделей по способу реализации.
11. Представьте классификацию моделей по характеру воспроизводимых сторон оригинала.
12. Представьте классификацию моделей по полноте представления объекта.
13. Что такое моделирование? Каковы особенности моделирования в психологии?
14. Что такое психологическая модель? математическая модель?
15. Представьте основные направления моделирования в психологии.
16. Охарактеризуйте психологическое моделирование.
17. Представьте моделирование психических процессов с помощью моделей-описаний.
18. Охарактеризуйте действующие модели.
19. Охарактеризуйте моделирование физиологических процессов.
20. Представьте результаты моделирования познавательных психических процессов.
21. Представьте результаты моделирование регуляционных процессов психики и личности.
22. Опишите результаты моделирования искусственного интеллекта.
23. Охарактеризуйте нетрадиционные методы моделирования.
24. Представьте возможности обработки данных с помощью универсальных статистических пакетов.
25. Представьте возможности и ограничения обработки данных с помощью математических пакетов.
26. Представьте возможности и ограничения обработки данных с помощью табличных процессоров.
27. Какова структура методологического обеспечения научных исследований?
28. Какие требования предъявляются к научному тексту?
29. Охарактеризуйте квалификационную работу.
30. Дайте характеристику научному отчету.

ПРАКТИКУМ

Практическое занятие № 10

Сопоставление совокупностей по уровню и однородности признака

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Классификация задач психологического исследования.
2. Задачи на выявление различий в уровне исследуемого признака и методы их решения.
3. Задачи на оценку сдвига значений исследуемого признака и методы их решения.
4. Задачи на выявление различий в распределении признака и методы их решения.
5. Задачи на выявление степени согласованности изменений двух признаков (двух иерархий) и методы их решения.
6. Задачи на выявление изменений признака под влиянием контролируемых условий и методы их решения.
7. Задача сопоставления в случае выявления различий между группами.
8. Задача сопоставления в случае построения группового профиля.
9. Характеристика Q -критерия Розенбаума.
10. Характеристика U -критерия Манна-Уитни.
11. Характеристика t -критерия Стьюдента для независимых выборок.
12. Характеристика F -критерия Фишера.
13. Характеристика H -критерия Крускала-Уоллиса.
14. Характеристика S -критерия тенденций Джонкира.
15. Алгоритм принятия решения о выборе критерия для сопоставления.

Задачи и упражнения

1. У 12 студентов психологического факультета и 14 студентов физического факультета ЛГУ были измерены показатели вербального интеллекта:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Студенты-психологи	126	127	132	120	119	126	120	123	120	116	123	115		
Студенты-физики	132	134	124	132	135	132	131	132	121	127	136	129	136	136

С помощью критерия Розенбаума проверить, превосходит ли одна группа студентов другую по уровню вербального интеллекта [27].

2. У 12 студентов психологического факультета и 14 студентов физического факультета ЛГУ были измерены показатели невербального интеллекта:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Студенты-психологи	113	107	123	122	117	112	105	108	111	114	102	104		
Студенты-физики	111	104	107	90	115	107	106	107	95	116	127	115	102	99

С помощью критерия Манна-Уитни проверить, превосходит ли одна группа студентов другую по уровню невербального интеллекта [27]. Можно ли решить эту задачу с помощью критерия Розенбаума?

3. В исследовании изучалась проблема психологических барьеров при обращении в службу знакомств у 17 мужчин и 23 женщин. Испытуемые должны были отметить на отрезке точку, соответствующую интенсивности внутреннего сопротивления, которое им пришлось преодолеть при обращении в службу знакомств. Показатели интенсивности внутреннего сопротивления при обращении в службу знакомств (в мм) представлены в таблице:

Мужчины				Женщины					
№ п.п.	Длина интервала	№ п.п.	Длина интервала	№ п.п.	Длина интервала	№ п.п.	Длина интервала	№ п.п.	Длина интервала
1	81	11	60	1	70	11	41	21	17
2	80	12	54	2	66	12	40	22	10
3	73	13	54	3	66	13	39	23	9
4	72	14	43	4	63	14	38		
5	72	15	30	5	63	15	38		
6	69	16	26	6	61	16	35		
7	69	17	26	7	60	17	30		
8	65			8	54	18	27		
9	65			9	47	19	25		
10	62			10	43	20	23		

Можно ли утверждать, что при обращении в службу знакомств мужчинам приходится преодолевать субъективно более мощное сопротивление, чем женщинам [27]?

4. На двух группах испытуемых – экспериментальной и контрольной – проверяли, вызывает ли небольшая доза алкоголя замедление времени реакции на определенный стимул у людей. Данные исследования представлены в таблице:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8
Время реакции экспериментальной группы	140	147	153	160	165	170	171	193
Время реакции контрольной группы	130	135	138	144	148	155	168	-

С помощью критерия Манна-Уитни проверить, являются ли статистически достоверными различия во времени реакции между испытуемыми экспериментальной группы (приняли алкоголь за 30 минут до эксперимента) и контрольной группы (не принимали алкоголь, по крайней мере, за 24 часа до тестирования) [21].

5. С помощью критерия Манна-Уитни определить достоверность различий между показателями субтеста «Экстраверсия-интроверсия» у мальчиков и девочек из таблицы данных для обработки Приложения 8 [13].

6. С помощью критерия Стьюдента определить достоверность различий между показателями среднего балла интеллекта у мальчиков и девочек из таблицы данных для обработки Приложения 8 [13].

7. На двух группах лабораторных мышей – опытной ($n_1 = 9$) и контрольной ($n_2 = 11$) – изучали воздействие на организм нового препарата. После испытаний масса тела животных, выраженная в граммах, варьировала следующим образом:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Опытная группа	80	76	75	64	70	68	72	79	83		
Контрольная группа	70	78	60	80	62	68	73	60	71	66	69

С помощью критерия Манна-Уитни определить, является ли статистически достоверной разность в массе у мышей опытной и контрольной групп [21].

8. Используя данные предыдущей задачи, с помощью критерия Стьюдента установить, является ли статистически достоверной разность в массе мышей опытной и контрольной групп [21].

9. 30 студентов (14 юношей и 16 девушек) во время экзаменационной сессии протестированы по тесту Спилбергера на уровень реактивной тревожности. Получены следующие результаты:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Юноши	32	34	28	43	35	26	41	32	40	39	42	38	44	33		
Девушки	34	30	37	43	42	44	46	36	45	28	34	41	40	35	42	39

С помощью критерия Розенбаума определить, являются ли статистически достоверными различия уровня реактивной тревожности у юношей и девушек [14].

10. С помощью критерия Манна-Уитни определить достоверность различий уровня реактивной тревожности у юношей и девушек по данным предыдущей задачи [14].

11. Решить предыдущую задачу с помощью критерия Стьюдента [14].

12. 40 студентов (20 юношей и 20 девушек) обследованы на уровень нейротизма – эмоциональной стабильности по тесту Айзенка. Получены следующие результаты:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Юноши	10	12	5	9	6	7	11	8	7	4	9	12	14	8	6	7	11	9	10	8
Девушки	5	9	9	13	8	8	10	7	13	11	10	11	10	13	8	10	9	16	13	11

Определить достоверность различий по уровню нейротизма у юношей и девушек с помощью критерия Манна-Уитни [14].

13. С помощью критерия Стьюдента определить достоверность различий по уровню нейротизма у юношей и девушек, используя данные предыдущей задачи [14].

14. С помощью критерия Фишера определить достоверность различий по уровню нейротизма у юношей и девушек, используя данные предыдущей задачи [14].

15. В психофизиологическом эксперименте 29 юношей и 27 девушек были протестированы по методике РДО (реакция на движущийся объект). В числе показателей использовалась величина средней ошибки (S) остановки движущейся

точки на линии. Получены следующие значения S (в миллисекундах) для двух групп испытуемых:

Юноши						Девушки					
№ п.п.	S	№ п.п.	S	№ п.п.	S	№ п.п.	S	№ п.п.	S	№ п.п.	S
1	37	11	41	21	32	1	87	11	41	21	24
2	31	12	44	22	24	2	41	12	21	22	21
3	32	13	26	23	32	3	17	13	37	23	21
4	26	14	29	24	24	4	46	14	27	24	51
5	37	15	40	25	23	5	59	15	37	25	52
6	24	16	40	26	33	6	17	16	44	26	23
7	18	17	30	27	29	7	33	17	38	27	52
8	46	18	39	28	38	8	23	18	41		
9	59	19	32	29	24	9	30	19	22		
10	19	20	21			10	40	20	40		

Определить достоверность различий между показателями РДО для юношей и девушек, выбрав адекватный критерий обработки результатов [14].

16. Первоклассники одной из средних школ (12 мальчиков и 10 девочек) были протестированы по детскому тесту Д. Векслера на уровень интеллекта. Результаты тестирования (индивидуальные значения IQ) представлены в таблице:

Испытуемый	Пол	IQ	Испытуемый	Пол	IQ
1	м	85	12	м	91
2	м	78	13	д	115
3	м	138	14	д	112
4	м	86	15	д	98
5	м	79	16	д	93
6	м	105	17	д	97
7	м	95	18	д	101
8	м	94	19	д	117
9	м	100	20	д	102
10	м	134	21	д	92
11	м	87	22	д	111

Проанализировать полученные результаты на предмет половых различий в уровне интеллекта детей, выбрав адекватный критерий обработки результатов [14].

17. В эксперименте по изучению действия наркотика (курение марихуаны) на глазодвигательную реакцию была измерена средняя результативность поражения мишеней испытуемыми экспериментальной и контрольной групп до курения, которая представлена в таблице:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Результаты контрольной группы	19	10	12	13	17	14	17	15	14	15	17	15	18	19	22
Результаты экспериментальной группы	12	21	10	15	15	19	17	14	13	11	20	15	15	14	17

Установить, существуют ли достоверные различия между результативностью поражения мишеней в двух группах, если распределение признака отлично от нормального [12].

18. Решить предыдущую задачу при условии, что распределение признака в обеих выборках соответствует нормальному распределению [12].

19. С помощью критерия Крускала-Уоллиса определить, различаются ли четыре группы испытуемых по интеллекту. Результаты измерения интеллекта по некоторому тесту представлены в таблице [21]:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-я группа	83	91	94	89	89	96	91	92	90	
2-я группа	91	90	81	83	84	83	88	91	89	84
3-я группа	101	100	91	93	96	95	94			
4-я группа	78	82	81	77	79	81	80	81		

20. Студент решил проверить, зависит ли способность к концентрации внимания от темперамента человека. Он составил набор задач, требующих большой сосредоточенности, и дал их испытуемым – сангвиникам, холерикам, флегматикам и меланхоликам. Количество правильных ответов представлено в таблице:

№ п.п.	Сангвиники	Холерики	Флегматики	Меланхолики
1	30	34	46	45
2	45	20	40	45
3	37	15	25	30
4	29	43	39	38
5	40	25	38	39
6	41	27	41	40

С помощью критерия Крускала-Уоллиса определить, есть ли зависимость количества правильно решенных задач от темперамента [21].

21. В педагогическом вузе протестировали студентов четырех разных факультетов старших курсов при помощи «Методики определения стрессоустойчивости и социальной адаптации» Холмса–Раге. Данные сведены в таблицу:

№ п.п.	Факультет	Тестовые баллы
1	Психолого-педагогический	228
2	Психолого-педагогический	214
3	Психолого-педагогический	239
4	Физико-математический	194
5	Физико-математический	221
6	Физической культуры	150
7	Физической культуры	155
8	Физической культуры	192
9	Физической культуры	181
10	Физической культуры	166
11	Музыкально-педагогический	280
12	Музыкально-педагогический	211
13	Музыкально-педагогический	235

С помощью критерия Крускала-Уоллиса установить, существуют ли достоверные различия в степени стрессоустойчивости у представителей разных факультетов [27].

22. У 22 студентов-юношей технического вуза, разбитых на 4 группы, исследовалась интеллектуальная настойчивость. Им предъявляли различные неразрешимые анаграммы, время работы над которыми не ограничивались. Показатели длительности работы над каждой анаграммой представлены в таблице:

№ п.п.	ФОЛИТОН (группа 1)	КАМУСТО (группа 2)	СНЕРАКО (группа 3)	ГРУТОСИЛ (группа 4)
1	145	145	128	60
2	194	210	283	2361
3	731	236	469	2416
4	1200	385	482	3600
5		720	1678	
6		848	2081	
7		905		
8		1080		

Используя критерий Крускала-Уоллиса установить, отличается ли длительность попыток решения каждой из четырех анаграмм испытуемыми [27].

23. В группе из 20 претендентов на должность коммерческого директора фирмы была проведена диагностика по качеству «Авторитетность», а затем измерен социометрический статус членов группы. Результаты исследования представлены в таблице:

№ п.п.	Группа 1 (0 выборов)	Группа 2 (1 выбор)	Группа 3 (2-3выбора)	Группа 4 (4 и более выборов)
1	5	5	5	9
2	5	6	6	9
3	2	7	7	8
4	5	6	7	8
5	4	4	5	7

С помощью критерия тенденций Джонкира определить, отличаются ли группы с разным социометрическим статусом и по уровню авторитетности [27].

24. В выборке из 28 мужчин-руководителей промышленного предприятия проводилось обследование с помощью 16-факторного личностного опросника Кеттелла. В таблице приведены индивидуальные значения испытуемых по фактору *N*, отражающему житейскую искушенность и проницательность, сгруппированные по четырем возрастным группам:

№ п.п.	Группа 1 (26-31 год)	Группа 2 (32-37 лет)	Группа 3 (38-42 года)	Группа 4 (46-52 года)
1	2	11	8	11
2	10	7	12	12
3	5	8	14	9
4	8	12	9	9
5	10	12	16	10
6	7	12	14	14
7	12	9	10	13

С помощью критерия Крускала-Уоллиса установить, есть определенная тенденция изменения значений фактора N при переходе от группы к группе [1; 27].

25. С помощью критерия тенденций Джонкира установить, есть ли определенная тенденция изменения значений фактора N при переходе от группы к группе в предыдущей задаче [27].

Практическое задание. Проверить гипотезу о достоверности различий средних баллов успеваемости за последний семестр студентов-психологов двух групп (подгрупп), используя для этого: а) подходящий непараметрический критерий; б) подходящий параметрический критерий.

Практическое занятие № 11

Оценка достоверности сдвига в значениях исследуемого признака

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Понятие сдвига в психологическом исследовании.
2. Временной сдвиг и его характеристика.
3. Ситуационный сдвиг и его характеристика.
4. Умозрительный сдвиг и его характеристика.
5. Структурный сдвиг и его характеристика.
6. Оценка сдвига под влиянием контролируемого воздействия.
7. Оценка сдвига под влиянием неконтролируемого воздействия.
8. Способы уравнивания выборок при исследовании изменений.
9. Использование параллельных форм тестов при исследовании изменений.
10. Критерии оценки статистической достоверности сдвигов различных видов.
11. Характеристика G -критерия знаков.
12. Характеристика T -критерия Вилкоксона.
13. Характеристика t -критерия Стьюдента для зависимых выборок.
14. Характеристика χ_r^2 -критерия Фридмана.
15. Характеристика L -критерия тенденций Пейджа.
16. Алгоритм принятия решения о выборе критерия для оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака.

Задачи и упражнения

1. Психолог проводит тренинг, целью которого является снижение уровня тревожности. Уровень тревожности участников (в баллах) представлен в таблице:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тревожность до тренинга	30	39	35	34	40	35	22	22	32	23
Тревожность после тренинга	34	39	26	33	34	40	25	23	33	24

С помощью критерия знаков выяснить, был ли эффективным данный вариант тренинга [21].

2. Получив отрицательный результат, психолог внес в содержание тренинга соответствующие коррективы. Он предположил, что улучшенный вариант тренинга позволяет снижать уровень тревожности испытуемых. Для проверки гипотезы он увеличил выборку испытуемых. Уровень тревожности участников (в баллах) представлен в таблице:

№ п.п.	Тревожность до тренинга	Тревожность после тренинга
1.	24	22
2.	12	12
3.	40	23
4.	30	31
5.	40	32
6.	35	24
7.	40	40
8.	32	12
9.	40	22
10.	24	21
11.	33	30
12.	38	26
13.	39	38
14.	25	23
15.	28	22
16.	36	22
17.	37	36
18.	32	38
19.	25	25

С помощью критерия знаков выяснить, был ли эффективным данный вариант тренинга [9].

3. Используя данные предыдущей задачи, проверить эффективность тренинга с помощью критерия Вилкоксона [9].

4. Используя данные задачи 2, проверить эффективность тренинга с помощью критерия Стьюдента [9].

5. С помощью критерия Вилкоксона проверить, выросли ли оценки лидерских качеств участников специального тренинга руководителей. Оценки тринадцати испытуемых, измеренные по соответствующему тесту до и после тренинга, представлены в таблице [21]:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Оценки лидерских качеств до тренинга	40	38	42	25	29	26	16	18	8	4	7	3	5
Оценки лидерских качеств после тренинга	47	43	36	38	30	22	25	21	14	12	5	9	5

6. Группе студентов перед прохождением тренинга было предложено протестироваться с помощью методики САН (самочувствие, активность, настроение). После тренинга этим же студентам предложили пройти повторное тести-

рование по этой же методике. Результаты приведены в таблице. Можно ли утверждать, что работа на тренинге помогла студентам улучшить свое функциональное состояние? Визуальный анализ данных позволяет утверждать, что сдвиг показателей действительно имел место. Но насколько достоверен этот сдвиг? Для выполнения задания использовать критерий Стьюдента [13].

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
До тренинга	150	180	122	143	125	170	167	161	148	180
После тренинга	168	184	129	147	134	178	165	162	150	184

7. В группе студентов был проведен тренинг креативного мышления. Перед тренингом (x_i) и после него (y_i) были проведены тестовые срезы по параллельным формам теста Й. Ниссинен и Э. Воутилайнена, позволяющего выявить творческий потенциал личности. Данные срезов сведены в таблицу:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	19	26	18	15	29	21	21	18	21	23	14	10
y_i	17	20	20	18	30	25	28	19	20	27	19	13

Определить результативность тренинга с помощью критерия Вилкоксона [13].

8. У 15 пациентов неврологической клиники измерялся уровень реактивной тревожности до (x_i) и после (y_i) соответствующего психотерапевтического воздействия. Получены следующие результаты:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	46	48	54	43	47	51	48	50	49	57	41	48	53	42	48
y_i	43	44	56	40	48	49	52	45	48	53	38	43	52	40	49

Определить эффективность психотерапевтического воздействия, используя критерий знаков [14].

9. Определить эффективность психотерапевтического воздействия по данным предыдущей задачи, используя критерий Вилкоксона [14].

10. Психолог проводит с младшими школьниками работу по развитию свойств внимания, используя для оценки результатов методику «Корректирующая проба». У 19 школьников было определено количество ошибок до проведения коррекционно-развивающих занятий и после них. Данные представлены в таблице. Уменьшилось ли количество ошибок внимания у младших школьников после занятий с психологом?

№ п.п.	Количество ошибок до занятий	Количество ошибок после занятий
1.	24	22
2.	12	12
3.	42	41
4.	30	31
5.	40	32
6.	55	44
7.	50	50
8.	52	32
9.	50	32
10.	22	21
11.	33	34
12.	78	56

№ п.п.	Количество ошибок до занятий	Количество ошибок после занятий
13.	79	78
14.	25	23
15.	28	22
16.	16	12
17.	17	16
18.	12	18
19.	25	25

Определить эффективность коррекционно-развивающей работы, используя критерий знаков [9].

11. Используя данные предыдущей задачи, проверить эффективность коррекционно-развивающей работы с помощью критерия Вилкоксона [9].

12. Используя данные предыдущей задачи, проверить эффективность коррекционно-развивающей работы с помощью критерия Стьюдента [9].

13. Аспирант решил проверить, происходит ли личностный рост у студентов-психологов в результате многочисленных тренингов, включенных в учебную программу. Для этого он измерил эмпатию и коммуникабельность (от 0 до 100 баллов) у студентов на первом курсе, а затем у этих же студентов на пятом курсе.

№ п.п.	1-й курс		5-й курс	
	Эмпатия	Коммуникабельность	Эмпатия	Коммуникабельность
1	25	67	23	68
2	37	56	39	55
3	68	45	78	40
4	45	66	44	65
5	15	55	20	50
6	59	44	29	49
7	51	46	51	49
8	48	38	56	37
9	89	37	78	30
10	39	87	40	88

С помощью критерия знаков проверить, произошли ли изменения в эмпатии и коммуникабельности у студентов за время учебы [21].

14. Решить предыдущую задачу с помощью критерия Вилкоксона [21].

15. Шесть студенток решили сесть на диету, чтобы похудеть. Результаты представлены в таблице:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6
Вес до диеты	81	82	69	69	77	90
Вес после диеты	78	80	65	68	71	80

Была ли диета эффективным средством похудения [25]?

16. В ходе проверки эффективности тренинга каждому из восьми членов группы дважды (до проведения тренинга – x_i и после тренинга – y_i) задавался вопрос: «Насколько часто твое мнение совпадает с мнением группы?». Для ответов использовалась 10-балльная шкала: 1 – никогда, ..., 5 – в половине случаев, ..., 10 – всегда. Данные представлены в таблице:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	3	6	5	2	7	3	4	5
y_i	4	6	6	4	6	4	5	6

С помощью критерия Стьюдента проверить гипотезу о том, что в результате тренинга самооценка конформизма участников изменилась [18].

17. Физическая подготовка девяти спортсменов проверена при поступлении в спортивную школу (x_i) и через неделю тренировок (y_i). При уровне значимости 0,05 проверить, значительно ли улучшилась физическая подготовка спортсменов в предположении, что: а) число баллов распределено нормально; б) распределение баллов отлично от нормального [7].

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	76	71	57	49	70	69	26	65	59
y_i	81	85	52	52	70	63	33	83	62

18. В эксперименте по изучению действия наркотика (курение марихуаны) на глазодвигательную реакцию была установлена средняя результативность поражения мишеней испытуемыми экспериментальной группы до воздействия наркотика (x_i) и после воздействия (y_i). Установить, влияет ли курение наркотика на результативность поражения мишеней в предположении, что: а) признак распределен нормально; б) распределение признака отлично от нормального [12].

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	12	21	10	15	15	19	17	14	13	11	20	15	15	14	17
y_i	8	20	6	8	17	10	10	9	7	8	14	13	16	11	12

19. В эксперименте по изучению действия наркотика (курение марихуаны) на глазодвигательную реакцию испытуемым контрольной группы предлагали выкурить сигарету с обычным табаком и травой, дым которой напоминал по запаху дым марихуаны. Экспериментатор дважды определял среднюю результативность поражения мишеней испытуемыми: до курения сигареты (x_i) и после курения (y_i). Установить, влияет ли курение сигареты без наркотика на результативность поражения мишеней в предположении, что: а) признак распределен нормально; б) распределение признака отлично от нормального [12].

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	19	10	12	13	17	14	17	15	14	15	17	15	18	19	22
y_i	21	8	13	11	20	12	15	17	15	15	18	16	15	19	25

20. Двенадцать испытуемых проранжировали свое отношение к различным жизненным ценностям (чем больше балл, тем более значима жизненная сфера). С помощью критерия Фридмана определите, одинаково ли участники опроса оценивают различные ценности [21].

№ п.п.	ЗДОРОВЬЕ	РАБОТА	СЕМЬЯ	ХОББИ
1	4	3	2	1
2	4	2	3	1
3	3	1,5	1,5	4

№ п.п.	ЗДОРОВЬЕ	РАБОТА	СЕМЬЯ	ХОББИ
4	3	1	2	4
5	4	2	1	3
6	2	2	2	4
7	1	2	3	4
8	2	4	1	3
9	3,5	1	2	3,5
10	4	1	3	2
11	4	2	3	1
12	3,5	1	2	3,5

21. По данным предыдущей задачи определите тенденцию в отношении жизненных ценностей. Является ли эта тенденция случайной [21]?

22. Социолог собрал данные об эффективности различных производственных предприятий по временам года (чем больше балл, тем эффективнее работает предприятие). С помощью критерия Фридмана определите, есть ли разница между показателями эффективности работы предприятий в различные времена года [21].

№ п.п.	ПРЕДПРИЯТИЕ	ОСЕНЬ	ЗИМА	ВЕСНА	ЛЕТО
1	Форд	40	34	45	38
2	Коммунарка	34	31	52	47
3	Милавица	30	45	41	42
4	Горизонт	51	58	66	52
5	Минский пивзавод	57	45	67	59
6	Атлант	35	56	58	61

23. В эксперименте по исследованию интеллектуальной настойчивости пяти испытуемым предъявляли три анаграммы, время работы над которыми фиксировалось. Анаграммы подбирались таким образом, чтобы постепенно подготовить испытуемого к тому, что над каждой последующей анаграммой ему приходится проводить все больше времени. Показатели длительности работы над каждой анаграммой представлены в таблице:

№ п.п.	Анаграмма 1 КРУА (РУКА)	Анаграмма 2 АЛСТЬ (СТАЛЬ)	Анаграмма 3 ИНААМАШ (МАШИНА)
1	5	235	7
2	7	604	20
3	2	93	5
4	2	171	8
5	35	141	7

Достоверны ли различия во времени решения испытуемыми анаграмм [27]?

24. По данным предыдущей задачи определить тенденцию увеличения индивидуальных показателей времени решения анаграмм. Является ли эта тенденция случайной [27]?

25. Шести школьникам предъявляют тест Равена. Фиксируется время решения каждого задания. Установить, существуют ли значимые различия между временем решения испытуемыми первых четырех заданий теста. Результаты измерений представлены в таблице [9]:

№	Время решения первого задания (в с)	Время решения второго задания (в с)	Время решения третьего задания (в с)	Время решения четвертого задания (в с)
1	8	3	5	12
2	4	15	12	13
3	6	23	15	20
4	3	6	6	12
5	7	12	3	8
6	15	24	12	7

26. Психолог высказывает предположение о наличии следующей тенденции: время решения заданий теста будет возрастать по мере увеличения их сложности (от первого задания к пятому). Для выявления этой тенденции он сравнивает время решения пяти заданий теста Равена у шести школьников. Результаты измерений представлены в таблице [9]. Проверить выдвинутую гипотезу.

№	Время решения 1-го задания	Время решения 2-го задания	Время решения 3-го задания	Время решения 4-го задания	Время решения 5-го задания
1	8	3	5	12	24
2	4	15	12	13	35
3	6	23	15	20	18
4	3	6	6	12	43
5	7	12	3	8	12
6	15	24	12	7	22

Практическое задание. Проверить гипотезу о достоверности сдвига показателей, полученных у студентов группы с помощью методики САН (самочувствие, активность, настроение) перед началом занятий и после их окончания, используя для этого: а) подходящий непараметрический критерий; б) подходящий параметрический критерий.

Практическое занятие № 12

Выявление различий в распределении признака

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Виды распределений признака.
2. Задача сопоставления эмпирического распределения с теоретическим (нормальным, равномерным).
3. Задача сопоставления двух (и более) эмпирических распределений.
4. Критерии, используемые для выявления различий в распределении признака, и их характеристика.
5. Применение χ^2 -критерия Пирсона для сопоставления эмпирического распределения с равномерным.
6. Использование χ^2 -критерия Пирсона для сопоставления эмпирического распределения с нормальным.

7. Особые случаи применения критерия χ^2 : поправка на непрерывность, укрупнение разрядов.

8. Применение λ -критерия Колмогорова-Смирнова для сопоставления эмпирического распределения с равномерным.

9. Использование λ -критерия Колмогорова-Смирнова для сопоставления двух эмпирических распределений.

10. Алгоритм выбора критерия для сопоставления распределений.

Задачи и упражнения

1. В группе студентов исследовался вопрос о предпочтении одного из четырех видов напитков. Каждому испытуемому было предложено выбрать один из четырех напитков. Данные опроса сведены в таблицу:

Pepsi cola	Coca cola	Sprite	Seven Up
10	14	6	8

Можно ли утверждать, что один из напитков является более популярным среди студентов, чем другие? Ответ обосновать с помощью χ^2 -критерия Пирсона [13].

2. Среди группы студентов проводился опрос с целью определения рейтинга преподавателей. Опрашиваемые должны были назвать самого компетентного педагога. Данные опроса сведены в таблицу:

Предмет А	Предмет В	Предмет С	Предмет D	Предмет Е
10	5	3	8	9

Можно ли утверждать, что кто-то из преподавателей достоверно значимо оценивается как менее компетентный [13]?

3. П. Бенсон и его коллеги изучали, как влияет физическая привлекательность на желание помочь. Было установлено количество юношей, которые помогли в определенной ситуации привлекательной и непривлекательной девушке:

	Девушка:		Всего
	привлекательная	непривлекательная	
Помогли	52	35	87
Не помогли	62	71	133

С помощью χ^2 -критерия Пирсона проверить гипотезу о том, что внешняя привлекательность девушек влияет на желание юношей им помочь [21].

4. Получив столь интересные результаты, П. Бенсон решил посмотреть, помогут ли девушки привлекательным и непривлекательным юношам в аналогичной ситуации:

	Юноша:		Всего
	привлекательный	непривлекательный	
Помогли	17	13	30
Не помогли	24	27	51

Влияет ли внешняя привлекательность юношей на желание девушек помочь им в затруднительной ситуации [21]?

5. Исследователь предположил, что число людей, обладающих одним из четырех основных типов темперамента (холерики, сангвиники, флегматики и меланхолики) приблизительно одинаково. Для проверки этой гипотезы он провел

тестирование 100 взрослых испытуемых с помощью опросника Айзенка. Тип темперамента испытуемых определялся по соотношению показателей экстраверсии и нейротизма. Было получено следующее распределение: холерики – 22 человека, сангвиники – 36, флегматики – 13 и меланхолики – 29 человек. Является ли распределение испытуемых по типам темперамента равномерным [14]?

6. Одинаков ли уровень подготовленности учащихся в двух школах, если в первой школе из 100 выпускников в вуз поступили 82, а во второй из 87 человек поступили в вуз 44 [14]?

7. Исследователь предположил, что экстраверты чаще становятся начальниками, а интроверты довольствуются должностями подчиненных. Для проверки предположения он собрал данные у 550 человек. Из 200 начальников 125 были экстравертами, а 75 – интровертами. Из 350 подчиненных 225 оказались экстравертами, а 125 – интровертами. С помощью χ^2 -критерия Пирсона определить, зависит ли занимаемая должность от направленности личности [21].

8. В двух школах района психолог выяснял мнения учителей об организации психологической службы в школе. Учителя давали ответы по номинальной шкале – довольны или не довольны. Результаты опроса представлены в таблице:

	Довольны	Не довольны	Сумма
Учителя 1-й школы	15	5	20
Учителя 2-й школы	7	8	15

В одинаковой ли степени педагоги двух школ удовлетворены работой психологической службы школы [14]?

9. В 1998 году в Нижнем Тагиле окончили школы с золотыми медалями 14 человек (5 юношей и 9 девушек), с серебряными – 26 человек (8 юношей и 18 девушек). Можно ли утверждать: а) что девушки получают золотые медали чаще, чем юноши? б) что девушки получают серебряные медали чаще, чем юноши [14]?

10. Из 50 опрошенных по поводу отношения к введению моратория на смертную казнь 30 были «за», 20 – «против». Предполагается, что выборка репрезентативна. Можно ли утверждать, что количество сторонников превышает количество противников введения моратория на смертную казнь [18]?

11. 200 учащихся выпускных классов были протестированы на уровень интеллектуальности (IQ). После нормирования полученного распределения IQ по стандартному отклонению были получены следующие результаты:

Классовый интервал	Частоты IQ	Классовый интервал	Частоты IQ
$-4,0 \div -3,5 \sigma$	0	$0 \div 0,5 \sigma$	31
$-3,5 \div -3,0 \sigma$	2	$0,5 \div 1,0 \sigma$	14
$-3,0 \div -2,5 \sigma$	6	$1,0 \div 1,5 \sigma$	4
$-2,5 \div -2,0 \sigma$	12	$1,5 \div 2,0 \sigma$	2
$-2,0 \div -1,5 \sigma$	18	$2,0 \div 2,5 \sigma$	1
$-1,5 \div -1,0 \sigma$	28	$2,5 \div 3,0 \sigma$	1
$-1,0 \div -0,5 \sigma$	39	$3,0 \div 3,5 \sigma$	0
$-0,5 \sigma \div 0$	42	$3,5 \div 4,0 \sigma$	0

Пользуясь χ^2 -критерием, определить, соответствует ли полученное распределение показателей IQ нормальному [14].

12. Пользуясь λ -критерием Колмогорова-Смирнова, определить, соответствует ли распределение показателей IQ , представленное в предыдущей задаче, нормальному распределению [14].

13. В выборке здоровых лиц мужского пола, студентов технических вузов в возрасте от 19 до 22 лет проводился тест М. Люшера в восьмицветном варианте. Установлено, что желтый цвет предпочитается испытуемыми чаще, чем отвергается.

Позиции желтого цвета	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
Эмпирические частоты	24	15	13	8	15	10	9	8	102

С помощью λ -критерия Колмогорова-Смирнова установить, отличается ли распределение желтого цвета по восьми позициям у здоровых испытуемых от равномерного распределения [27]?

14. С целью предсказания результатов выборов исследовалось предпочтение потенциальными избирателями пяти политических лидеров. По результатам опроса репрезентативной выборки из 120 респондентов была составлена таблица распределения предпочтений:

Политические лидеры	1	2	3	4	5	Всего
Количество предпочтений	21	37	29	15	18	120

Проверить, отличается ли распределение предпочтений от равномерного распределения с помощью χ^2 -критерия Пирсона [18].

15. Пользуясь данными предыдущей задачи с помощью λ -критерия Колмогорова-Смирнова установить, соответствует ли эмпирическое распределение равномерному [18].

16. Накануне выборов для каждого респондента репрезентативной выборки были определены: а) пол; б) один из пяти предпочитаемых политических лидеров.

Политические лидеры	1	2	3	4	5	Всего
Количество предпочтений в мужской выборке	5	25	10	8	3	51
Количество предпочтений в женской выборке	11	12	19	5	7	54

С помощью χ^2 -критерия Пирсона определить, зависят ли политические предпочтения от пола [18].

17. В двух школах района выяснялся уровень подготовки учащихся девятих классов по математике. Для этого в 9-х классах была проведена контрольная работа и случайным образом в каждой школе были отобраны работы 50 учащихся. Результаты исследования представлены в таблице:

Баллы	2	3	4	5	Всего
Количество учащихся 1-й школы	3	19	18	10	50
Количество учащихся 2-й школы	9	24	12	5	50

Существует ли статистически достоверная разница в уровне подготовки по математике девятиклассников двух школ [9]?

18. Решить предыдущую задачу с помощью λ -критерия Колмогорова-Смирнова [9].

19. Психолог сравнивает два эмпирических распределения, в каждом из которых было обследовано 200 человек по тесту интеллекта. Данные исследования представлены в таблице:

Количество баллов	60	70	80	90	100	110	120	130	140	Сумма
Количество испытуемых 1-й выборки	1	5	17	45	70	51	10	1	0	200
Количество испытуемых 2-й выборки	1	3	7	22	88	69	7	2	1	200

Проверить, различаются ли между собой эти распределения с помощью χ^2 -критерия Пирсона [9].

20. Решить предыдущую задачу с помощью λ -критерия Колмогорова-Смирнова [9].

21. Психолог проводит исследование с целью выяснить, влияет ли уровень интеллекта на профессиональные достижения. Для решения этой задачи 90 человек были оценены по уровню их профессиональных достижений (ниже среднего, средний, выше среднего) и по уровню интеллекта (ниже среднего, средний, выше среднего). Эмпирические данные представлены в таблице:

Уровень интеллекта:	Уровень профессиональных достижений:			Сумма
	ниже среднего	средний	выше среднего	
ниже среднего	20	5	5	30
средний	5	15	10	30
выше среднего	5	20	5	30

Существуют ли достоверные различия в уровне профессиональных достижений у испытуемых, имеющих разный уровень интеллекта [9]?

Практическое задание. Изучить вопрос о предпочтении студентами-психологами одного из экзаменов, выносимых на очередную сессию. Проверить: а) отличается ли распределение предпочтений экзаменов у студентов группы от равномерного распределения; б) существуют ли достоверные различия в распределениях предпочтений экзаменов у студентов-психологов двух групп (подгрупп).

Практическое занятие № 13 Многофункциональные критерии

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Многофункциональные статистические критерии и их возможности.
2. Суть многофункциональных критериев.
3. Понятие эффекта.

4. Эффект как значение качественно определяемого признака.
5. Эффект как уровень количественно измеряемого признака.
6. Эффект как соотношение уровней или значений признака.
7. Многофункциональные критерии как замена традиционных критериев.
8. Характеристика критерия φ^* -угловое преобразование Фишера.
9. Характеристика биномиального Z-критерия.

Задачи и упражнения

1. Психолог провел эксперимент, в котором выяснилось, что из 23 учащихся математического класса 15 справились с заданием, а из 28 учеников обычного класса с тем же заданием справились 11 человек. Можно ли считать, что различия в успешности решения задания учащимися математического и обычного класса достоверны [9]?

2. Психолог проводил анализ выраженности уровня тревожности с помощью опросника Тейлора в группе детей-сирот и в группе их сверстников из полных семей. Результат в 40 баллов и выше рассматривался как показатель высокого уровня тревожности. Было установлено, что из 10 детей-сирот 7 имеют высокий уровень тревожности, а из 13 детей, воспитывающихся в полных семьях, аналогичный показатель имеют 3 ребенка. Является ли уровень тревожности у детей сирот более высоким, чем у детей из полных семей [9]?

3. С помощью цветового теста отношений (ЦТО) были исследованы семейные отношения у мужчин-невротиков (38 человек). Оказалось, что 74% мужчин ассоциируют свою жену с одним из светлых цветов и лишь 26% – с темным. Себя ассоциируют со светлыми цветами лишь 32% мужчин, остальные 68% – с темными. Можно ли утверждать, что в восприятии семьи мужчинами-невротиками наблюдается выраженная асимметрия: качества активного, доминантного, «светлого» начала больные приписывают жене, а себе оставляют пассивную, страдательную роль [14]?

4. Американский исследователь Стеннет изучал связь между полом и количеством пропусков детского сада. Он получил следующие данные: более 20 дней в году пропустили 29% мальчиков и 27% девочек. Всего в его исследовании приняли участие 873 мальчика и 837 девочек. Можно ли считать, что мальчики пропускают детский сад чаще девочек [14]?

5. С помощью цветового теста отношений протестированы 38 человек с депрессивными симптомами и 50 человек без каких-либо выраженных психиатрических симптомов. Оказалось, что свое настроение ассоциируют с яркими цветами (красный, желтый, зеленый) 40% здоровых и 5% депрессивных испытуемых. Свое прошлое ассоциируют с аналогичными цветами 14% больных против 22% здоровых. Определить достоверность различий между данными группами испытуемых [14].

6. Исследователь изучает, зависит ли занимаемая должность (начальник или подчиненный) от направленности личности (экстраверт или интроверт). В исследовании приняли участие 550 человек. Из 200 начальников 125 были экстравер-

тами, а 75 – интровертами. Из 350 подчиненных 225 оказались экстравертами, а 125 – интровертами. С помощью критерия φ^* -угловое преобразование Фишера определить, зависит ли занимаемая должность от направленности личности [21].

7. В выборке из 14 студентов-психологов Санкт-Петербургского университета определялось преобладание правого или левого глаза в прицельной способности глаз. Совпадают ли эти данные с результатом обследования 100 студентов медицинских специальностей. Данные представлены в таблице [27]:

Категория испытуемых:	Количество испытуемых:		Сумма
	с преобладанием левого глаза	с преобладанием правого глаза	
студенты-психологи	6	8	14
студенты-медики	19	81	100

8. В исследовании А.А. Кузнецова изучались различия в реагировании на вербальную агрессию между милиционерами патрульно-постовой службы и обычными гражданами. Фиксировалось количество испытуемых обеих категорий, которые в ответ на агрессивное высказывание вступали в разговор или отказывались от контакта.

Категория испытуемых:	Количество испытуемых		Сумма
	продолживших разговор	не продолживших разговор	
милиционеры	15	10	25
гражданские лица	7	18	25

Можно ли утверждать, что милиционеры в большей степени склонны продолжать контакт с агрессором, чем другие граждане [27]?

9. В том же исследовании (А.А. Кузнецов) фиксировался характер реакции на агрессивное обращение милиционеров патрульно-постовой службы и обычных граждан (агрессивный или неагрессивный ответ).

Категория испытуемых:	Количество испытуемых, которые дали:		Сумма
	неагрессивный ответ	агрессивный ответ	
милиционеры	10	5	15
гражданские лица	3	4	7

Можно ли утверждать, что милиционеры склонны отвечать агрессору более примирительно, чем гражданские лица [27]?

10. В исследовании (Е.В. Сидоренко и др.) проводился опрос английских врачей общей практики двух категорий: а) врачи, чьи приемные имеют собственные финансовые фонды; б) врачи, работа которых обеспечивается государственным бюджетом. Каждый из врачей должен был дать прогноз, какова будет доля приемных с собственным бюджетом в следующем году. Результаты опроса представлены в таблице:

Прогнозируемая доля приемных с фондами	Частота прогноза		Сумма
	врачи с фондами ($n = 45$)	врачи без фонда ($n = 25$)	
от 0 до 20%	4	5	9
от 21 до 40%	15	11	26
от 41 до 60%	18	5	23
от 61 до 80%	7	4	11
от 81 до 100%	1	0	1

С помощью критерия φ^* -угловое преобразование Фишера установить, различаются ли прогнозы врачей обеих категорий. Для разделения выборок на подгруппы, у которых «есть эффект» и «нет эффекта», воспользоваться λ -критерием Колмогорова-Смирнова [27].

11. В том же исследовании английских врачей (см. задача 10) фиксировалось количество партнеров, с которыми сотрудничают врачи, имеющие частные фонды, и врачи, финансируемые из бюджета.

Количество партнеров	Врачи с фондами ($n = 49$)	Врачи без фонда ($n = 28$)	Сумма
2 и менее	2	15	17
3-4 партнера	6	5	11
5-6 партнеров	27	8	35
7 и более	14	0	14

С помощью критерия φ^* -угловое преобразование Фишера установить, действительно ли в приемных с фондами работают большие по составу команды врачей, чем в приемных без фондов. Для разделения выборок на подгруппы, у которых «есть эффект» и «нет эффекта», воспользоваться λ -критерием Колмогорова-Смирнова [27].

12. Два продавца продают с лотка газетно-журнальную продукцию. Первый осуществляет раскладку продукции с учетом психологических рекомендаций (по планограмме), второй – случайным образом. В конце рабочего дня выяснилось, что первый продавец реализовал 68 наименований, второй – 43. Сказывается ли способ раскладки товара на успешности торговли [13]?

13. Приезжий профессор должен прочитать лекцию по дифференциальной психофизиологии. Посещение добровольное, тема лекции не связана с зачетом. На лекцию пришло 42 юноши и 89 девушек. Можно ли утверждать, что лекция вызвала у девушек больший интерес, чем у юношей [13]?

14. Наблюдатель фиксирует количество пешеходов, выбравших правую или левую из двух симметричных дорожек на пути из точки A в точку B (например, при обходе круглой площади). Установлено, что 51 из 70 человек выбрали правую дорожку, и лишь 19 – левую. Можно ли утверждать, что правая дорожка предпочитается достоверно чаще [27] ?

15. В исследовании изучалось, как влияют два разных способа запоминания материала на успешность обучения. После обучения количество усвоивших материал в группе 1 (использовавшей первый способ запоминания) составило 30 человек, а в группе 2 – 24. Можно ли утверждать, что различия в условиях запоминания влияют на результативность обучения [18]?

16. В эксперименте испытуемый должен выбрать задание на правом или левом столе. В инструкции подчеркивают, что задания на обоих столах одинаковы. Из 150 испытуемых правый стол выбрали 98 человек, а левый – 52. С помощью биномиального критерия определить, является ли преобладание выбора правого стола случайным [14]. Сопоставить результат с выводом, полученным с помощью χ^2 -критерия Пирсона.

17. В репрезентативной выборке из 50 человек проведен опрос по поводу отношения к введению моратория на смертную казнь. 30 опрошенных высказа-

лись «за» и 20 – «против». С помощью биномиального критерия установить, превышает ли количество сторонников введения моратория на смертную казнь количество его противников [18]. Сопоставить результат с выводом, полученным с помощью χ^2 -критерия Пирсона.

18. В исследовании проверялась гипотеза о том, что лучше запоминаются легкопроизносимые слоги (например, МЫР, ПЫР), чем труднопроизносимые (МКР, ПВР). Десяти испытуемым предлагали прослушать список, состоящий из разных буквосочетаний, а затем воспроизвести его по памяти. Количество правильно воспроизведенных слов у каждого испытуемого представлено в таблице [25]:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Легкопроизносимые слоги	7	8	6	2	7	7	8	6	5	8
Труднопроизносимые слоги	5	5	6	1	6	4	4	3	6	2

С помощью биномиального критерия проверить, подтвердилась ли гипотеза исследования.

19. С помощью биномиального критерия проверить, выросли ли оценки лидерских качеств участников специального тренинга руководителей. Оценки тринадцати испытуемых, измеренные по соответствующему тесту до и после тренинга, представлены в таблице [21]:

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Оценки лидерских качеств до тренинга	40	38	42	25	29	26	16	18	8	4	7	3	5
Оценки лидерских качеств после тренинга	47	43	36	38	30	22	25	21	14	12	5	9	5

20. В эксперименте по изучению действия наркотика (курение марихуаны) на глазодвигательную реакцию была установлена средняя результативность поражения мишеней испытуемыми экспериментальной группы до воздействия наркотика (x_i) и после воздействия (y_i).

№ п.п.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	12	21	10	15	15	19	17	14	13	11	20	15	15	14	17
y_i	8	20	6	8	17	10	10	9	7	8	14	13	16	11	12

Используя биномиальный критерий, установить, влияет ли курение наркотика на результативность поражения мишеней [12]. Сопоставить результат с выводами, полученными с помощью t -критерия Стьюдента и G -критерия знаков.

Практическое задание. Проверить гипотезу о достоверности различий средних баллов успеваемости за последний семестр студентов-психологов двух групп (подгрупп), используя для этого подходящий многофункциональный критерий.

С помощью одного из многофункциональных критериев проверить гипотезу о достоверности сдвига показателей, полученных у студентов группы с помощью методики САН (самочувствие, активность, настроение) перед началом занятий и после их окончания.

Практическое занятие № 14

Дисперсионный анализ

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Задача исследования изменений признака под влиянием контролируемых условий.
2. Фактор и результативный признак. Градации фактора.
3. Способы разделения переменных на факторы и результативные признаки.
4. Вариативность признака и ее виды.
5. Виды дисперсионного анализа и их связь с непараметрическими методами.
6. Дисперсионный комплекс и его создание.
7. Подготовка данных к дисперсионному анализу.
8. Характеристика однофакторного дисперсионного анализа для независимых выборок.
9. Характеристика однофакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок.
10. Характеристика двухфакторного дисперсионного анализа для независимых выборок.
11. Характеристика двухфакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок.

Задачи и упражнения

1. Проведено исследование двух групп испытуемых, различающихся по ведущей руке (левши и правши). Оценивалось удобство пользования компьютером (чем выше балл, тем удобнее). Результаты представлены в таблице. Влияет ли различие в ведущей руке на удобство пользования компьютером [22]?

№ п.п.	Левши	Правши
1.	1	6
2.	2	7
3.	5	9
4.	8	10

2. В исследовании изучается отношение населения к программе по повышению пенсий. Опрошено три группы людей – с низким, средним и высоким достатком. Данные представлены в таблице. Более высокий балл означает более сильную поддержку программы повышения пенсий. Проверить, влияет ли различие в уровне достатка у населения на поддержку программы повышения пенсий: а) с помощью дисперсионного анализа; б) с помощью критерия Крускала-Уоллеса [22].

№ п.п.	Группа с низким достатком	Группа со средним достатком	Группа с высоким достатком
1	12	4	1
2	8	5	3
3	10	4	4
4	5	3	6
5	7	6	8
6	9	10	5
7	14	1	3
8	9	8	2
9	4	5	2

3. Психолог провел тестирование мышления в трех учреждениях образования с помощью серии из десяти задач. При этом фиксировалось количество правильно решенных задач восьмью испытуемыми в каждом учебном заведении.

№ п.п.	Учащиеся общеобразовательной школы	Учащиеся школы-интерната	Учащиеся колледжа
1	3	4	6
2	5	4	7
3	2	3	8
4	4	8	6
5	8	7	7
6	4	4	9
7	3	2	10
8	9	5	9

Проверить, влияет ли форма обучения на эффективность решения задач: а) с помощью дисперсионного анализа; б) с помощью критерия Крускала-Уоллеса [9].

4. Исследователь изучает, можно ли какой-нибудь из трех рационов для откорма поросят рекомендовать в качестве предпочтительного. Для этого 18 поросят случайным образом разделили на три равные группы и кормили по разным рационам (А, В и С). Недельные привесы поросят представлены в таблице:

№ п.п.	Рацион А	Рацион В	Рацион С
1	610	595	527
2	635	614	621
3	580	550	564
4	701	602	598
5	640	633	601
6	632	612	593

Существуют ли различия в привесе у поросят в зависимости от рациона [12]?

5. Изучалось различие в продуктивности воспроизведения одного и того же материала в трех группах испытуемых (по 5 человек), различающихся условиями предъявления этого материала для запоминания.

№ п.п.	Условие 1	Условие 2	Условие 3
1	203	213	171
2	184	246	208
3	169	184	260
4	216	282	193
5	209	190	160

Проверить гипотезу о том, что продуктивность воспроизведения материала зависит от условий его предъявления [18].

6. В четырех группах спортсменов высокой квалификации (футболисты, гимнасты, теннисисты, пловцы – по 5 человек в каждой) сравнивалось время реакции выбора (в мс). Психолог выясняет, будут ли различия во времени реакции у спортсменов различного профиля. Результаты эксперимента приведены в таблице [9]:

№ п.п.	1 группа	2 группа	3 группа	4 группа
1	203	213	171	207
2	184	246	208	152
3	169	184	260	176
4	216	282	193	200
5	209	190	160	145

7. Исследовалось влияние возраста на уровень нейротизма, определяемого по тесту Айзенка. Тестирование проводилось в 4-х группах испытуемых разного возраста (соответственно, 7-й, 8-й, 9-й и 10-й классы) по 10 человек в каждой группе. Получены следующие результаты:

№ п.п.	7-й класс	8-й класс	9-й класс	10-й класс
1	16	9	21	9
2	6	14	17	13
3	19	19	23	19
4	10	16	12	14
5	11	20	12	13
6	13	18	17	12
7	21	14	15	15
8	14	22	21	23
9	13	12	9	14
10	11	17	9	17

С помощью однофакторного дисперсионного анализа определить, является ли влияние возраста на уровень нейротизма статистически значимым [14].

8. С целью определения степени эффективности сеансов НЛП, проводимых у больных неврастенией, было выбрано четыре группы больных по 10 человек в каждой: первая группа – контрольная, в которой психотерапевтических воздействий не проводилось; вторая группа – больные, прошедшие 1 сеанс НЛП; третья и четвертая группы больных прошли 2 и 3 сеанса НЛП соответственно. В качестве критерия эффективности психотерапевтического воздействия использовался уровень ситуативной тревожности, измеренный по тесту Спилбергера. Получены следующие данные:

№ п.п.	Уровень ситуативной тревожности в баллах:			
	у контрольной группы	у группы после одного сеанса	у группы после двух сеансов	у группы после трех сеансов
1	48	44	44	47
2	51	45	48	44
3	46	45	48	46
4	49	50	40	49
5	47	48	46	47
6	52	48	50	46

№ п.п.	Уровень ситуативной тревожности в баллах:			
	у контрольной группы	у группы после одного сеанса	у группы после двух сеансов	у группы после трех сеансов
7	50	45	44	50
8	52	47	47	48
9	48	50	49	38
10	50	44	40	44

Определить эффективность сеансов НЛП, используя результаты тестирования по Спилбергеру на уровень ситуативной тревожности [14].

9. Группа учеников одной из школ г. Екатеринбурга была обследована по тесту Айзенка на уровень экстра-интроверсии и нейротизма. Обследование было проведено четырехкратно с перерывами в 1-2 года: в 7-м, 8-м, 9-м и 10-м классах. Были получены следующие результаты:

№ п.п.	Экстраверсия				Нейротизм			
	7 кл.	8 кл.	9 кл.	10 кл.	7 кл.	8 кл.	9 кл.	10 кл.
1	15	15	16	17	16	17	21	17
2	15	19	17	18	6	12	17	14
3	11	13	11	13	19	22	23	23
4	12	8	8	12	10	14	12	15
5	13	11	14	14	11	18	12	12
6	8	8	10	8	13	20	17	13
7	12	15	13	13	21	16	15	14
8	8	11	7	8	14	19	21	19
9	15	17	15	16	13	14	9	13
10	18	14	16	15	11	9	9	9

Используя метод однофакторного дисперсионного анализа, определить, достоверно ли изменяются показатели экстра-интроверсии и нейротизма у подростков с 7 по 10 класс [14].

10. Проводилось исследование возрастной динамики личностной тревожности у подростков с помощью теста Спилбергера–Ханина. Для этого были взяты четыре независимые группы испытуемых (по десять человек в каждой) в возрасте 13, 14, 15 и 16 лет соответственно. Получены следующие результаты:

№ п.п.	Уровень личностной тревожности в баллах:			
	13 лет	14 лет	15 лет	16 лет
1	41	43	38	40
2	42	43	40	39
3	39	41	45	40
4	40	39	41	38
5	42	42	43	45
6	39	38	44	43
7	40	44	42	37
8	37	42	46	36
9	35	40	44	40
10	38	44	41	43

Определить, достоверно ли изменяется уровень личностной тревожности у подростков в возрасте с 13 до 16 лет [14].

11. В психологическом эксперименте исследовалось влияние мотивации на уровень запоминания слов. Трём группам испытуемых, по 10 человек в каждой, были предложены 20 многосложных, редко используемых слов. Первой группе было обещано, что правильное воспроизведение десяти и более слов будет вознаграждаться призами. Во второй группе испытуемые предупреждались, что при воспроизведении менее семи слов они будут должны сделать несколько физических упражнений. В третьей группе никаких дополнительных инструкций не давалось. Количество правильно воспроизведенных слов представлено в таблице:

№ п.п.	Группа 1	Группа 2	Группа 3
1	6	8	5
2	7	9	7
3	9	7	6
4	6	8	6
5	8	10	7
6	11	8	7
7	7	7	5
8	6	6	9
9	10	9	6
10	7	7	7

Определить, влияет ли мотивация на успешность запоминания [14].

12. Ортега и Пипал (1984) измеряли уровень диастолического давления у 20 испытуемых в трех различных условиях: в состоянии покоя, после релаксации, после 15 минут двигательной активности. Полученные данные представлены в таблице:

№ п.п.	Условия измерения давления:			№ п.п.	Условия измерения давления:		
	активность	покой	релаксация		активность	покой	релаксация
1	81	58	61	11	70	67	81
2	67	64	62	12	83	67	61
3	73	60	65	13	71	63	63
4	73	66	66	14	65	65	61
5	77	68	74	15	68	64	59
6	70	65	70	16	65	71	62
7	68	67	64	17	71	53	57
8	70	74	60	18	60	59	68
9	66	66	63	19	70	61	73
10	78	78	74	20	80	67	63

Влияет ли уровень активности на артериальное давление [14]?

13. Зависит ли уровень ценностно-ориентационного единства (ЦОЕ) внутри пяти отрядов от длительности пребывания в пионерском лагере. Тестирование проводилось три раза: в начале смены, в ее середине и в конце. Данные представлены в таблице. Более высокий балл означает более выраженное единство членов отряда. Проанализировать данные задачи с помощью χ_r^2 -критерия Фридмана [13].

№ отряда	ЦОЕ в начале смены	ЦОЕ в середине смены	ЦОЕ в конце смены
1	8	9	22
2	10	15	15
3	9	14	18
4	9	12	14
5	12	14	18

14. Исследователь изучает эффективность воспроизведения предъявленного ряда из 24-х не связанных по смыслу слов у пяти испытуемых. Его интересует, будет ли проявляться эффект начала и конца ряда. Для каждого испытуемого подсчитывается частота воспроизведения слов из начала, середины и конца ряда [18].

№ п.п.	Количество воспроизведенных слов:		
	из начала ряда	из середины ряда	из конца ряда
1	4	3	6
2	6	4	5
3	5	5	7
4	7	5	7
5	3	3	7

Проанализировать данные задачи с помощью χ_r^2 -критерия Фридмана.

15. В исследовании изучались факторы, влияющие на удовлетворенность профессией учителя. Были измерены показатели удовлетворенности трудом у педагогов обоих полов, имеющих различный стаж: 0-5 лет, 6-10 лет, 11-15 лет. Данные представлены в таблице:

Пол	Стаж:		
	0-5 лет	6-10 лет	11-15 лет
Мужчины	5	8	6
	3	9	5
	6	10	9
	4	9	7
	7	5	8
Женщины	5	10	9
	8	9	8
	4	9	8
	4	8	10
	7	9	7

Влияет ли половая принадлежность и стаж работы на удовлетворенность профессией педагога [13]?

16. Участникам олимпиады по математике предъявляются задания трех степеней сложности (уравнение с одним неизвестным, система уравнений с двумя неизвестными и система уравнений с тремя неизвестными). Фиксируется время выполнения каждой задачи (в минутах). Первая группа из четырех человек ре-

шает задания в присутствии педагога, а вторая группа (также из четырех человек) – в его отсутствие. Данные представлены в таблице:

Условия выполнения	Сложность задания:		
	1 неизвестное	2 неизвестных	3 неизвестных
Учитель присутствует	1	2	2
	1	3	3
	1	3	7
	2	2	5
Учитель отсутствует	1	3	6
	1	3	5
	2	4	8
	2	3	5

Можно ли сказать, что чем сложнее задача, тем больше времени требуется на ее решение, что присутствие педагога оказывает воздействие на скорость решения задания или, что на время решения задач влияет взаимодействие этих факторов [13]?

17. Изучается влияние численности группы (малая – 2-3 человека; средняя – 5-7 человек, большая – 10-15 человек) и наличия/отсутствия в группе лидера на успешность группового решения задачи. Время решения тестовой задачи группами разной численности в зависимости от наличия или отсутствия лидера представлены в таблице:

Вид группы:	Численность группы:		
	малая	средняя	большая
Группы без лидера	4	9	8
	8	5	8
	5	7	9
	7	6	6
	6	8	9
Группы с лидером	9	10	7
	11	7	5
	10	8	4
	8	8	6
	12	7	8

Проверить гипотезы о влиянии факторов и их взаимодействия на время решения групповой задачи [18].

18. Изучается эффективность воспроизведения ряда из 24-х не связанных по смыслу слов двумя группами испытуемых (по 5 человек в каждой) в зависимости от способа их предъявления. Первой группе испытуемых все 24 слова ряда предъявлялись с одинаковой интонацией. При предъявлении слов второй группе испытуемых срединная восьмерка ряда интонационно выделялась. Для каждого испытуемого фиксировалось количество воспроизведенных слов из первой, второй и третьей восьмерки ряда слов.

Способ предъявления слов:	Количество воспроизведенных слов:		
	1-й восьмерки	2-й восьмерки	3-й восьмерки
без интонационного выделения	4	3	6
	6	4	5
	5	5	7
	7	5	7
	3	3	5
с интонационным выделением	3	5	4
	5	6	3
	4	7	5
	6	7	5
	2	5	3

Влияет ли интонация на воспроизведение ряда слов [18]?

19. На больных амнезией испытывалось действие двух лекарственных препаратов (A и B), которые, согласно предварительным испытаниям, способствуют улучшению памяти. Для первого препарата была взята контрольная группа (A_0) и группа больных, прошедших месячный курс лечения (A_1). Для второго препарата исследовались 3 градации больных (B_0 – контроль, B_1 – больные, прошедшие один курс лечения, и B_2 – больные, прошедшие два месячных курса лечения препаратом). Для каждой комбинации были выбраны по 5 больных, которые тестировались по методу Эббингауза (запоминание и воспроизведение бессмысленных слогов). В качестве критерия использовалась средняя вероятность правильного воспроизведения у каждого больного. Получены следующие данные:

Пациенты:	Количество воспроизведенных слов:		
	группа B_0	группа B_1	группа B_2
группа A_0	4	40	28
	11	32	21
	16	48	28
	10	36	23
	6	40	16
группы A_1	12	8	16
	18	11	8
	24	14	0
	18	21	8
	36	28	0

Методом двухфакторного дисперсионного анализа определить степень эффективности препаратов A и B , используемых для лечения больных амнезией при их отдельном и совместном применении [14].

20. Психолог решил проверить, как скажутся на самочувствии его клиентов с шизоидным и невротическим типами личности различные методы терапии: гештальт-терапия, арт-терапия, розги-терапия. Данные его исследования (оценка улучшения состояния в баллах) представлены в таблице:

Клиенты:	Вид терапии:		
	гештальт	арт	розги
с невротическим типом личности	8	8	4
	4	10	6
	0	6	8

Клиенты:	Вид терапии:		
	гештальт	арт	розги
с шизоидным типом личности	10	0	15
	6	4	9
	14	2	12

С помощью двухфакторного дисперсионного анализа определить, был ли эффективным какой-нибудь вид терапии и для какого типа клиентов [25].

Практическое задание. С помощью методики самооценки психических состояний Г. Айзенка оценить уровень ригидности студентов группы. Используя однофакторный дисперсионный анализ проверить гипотезу о наличии взаимосвязи между уровнем ригидности и средним баллом успеваемости студентов за последний семестр.

Практическое занятие № 15 Многомерный статистический анализ

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Использование многомерных методов в психологии.
2. Классификация методов многомерного анализа по назначению.
3. Классификация методов многомерного анализа по способу сопоставления данных.
4. Классификация методов многомерного анализа по виду исходных данных.
5. Характеристика факторного анализа: назначение, задачи и ограничения метода.
6. Методы факторного анализа: метод главных компонент и собственно факторный анализ.
7. Процедура факторизации.
8. Факторы и их виды. Вращение факторов.
9. Характеристика кластерного анализа: агломеративный метод.
10. Характеристика кластерного анализа: итеративный метод.
11. Характеристика множественной регрессии.
12. Характеристика дискриминантного анализа.
13. Характеристика многомерного корреляционного анализа.
14. Частный коэффициент корреляции.

Задачи и упражнения

1. Представить классификацию методов многомерного анализа в виде схемы.
2. При проведении факторного анализа матрицы наблюдений, взятой из Приложения 8, получена следующая факторная матрица (жирным шрифтом выделены значимые показатели):

Переменная	Фактор 1	Фактор 2
Осведомленность	0,011131	0,702881
Скрытые фигуры	0,417273	0,48626
Пропущенные слова	0,274693	0,64727
Арифметика	0,748789	0,057049
Понятливость	0,284776	0,425368
Исключение изображений	0,220683	0,609239
Аналогии	0,673079	0,235562
Числовые ряды	0,672762	0,17784
Умозаключения	0,711571	0,137342
Геометрическое сложение	0,6856	0,074793
Заучивание слов	-0,16754	0,758415
Средний IQ	0,739398	0,665014
Экстраверсия-интроверсия	-0,16457	0,313332
Нейротизм	0,283054	-0,12875
Средняя отметка	0,291898	0,625413

Проинтерпретировать полученные результаты, присвоить название факторам [13].

3. Психолог провел факторный анализ эмпирических данных, а затем вращение факторов (варимакс). Сравнить факторную матрицу, полученную до вращений, с матрицей, полученной после вращений.

Переменная	До вращений		После вращений	
	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 1	Фактор 2
Экстраверсия	0,37	0,29	0,60	0,00
Тревожность	0,42	0,52	0,74	0,00
Нейротизм	0,43	-0,43	0,13	0,75
Агрессивность	0,51	-0,32	0,06	0,89

Проинтерпретировать полученные данные, сделать вывод [9].

4. Исследователь измерил на выборке из пятидесяти испытуемых пять показателей интеллекта. Применяв факторный анализ, исследователь выделил два фактора. Таблица факторных нагрузок после варимакс-вращения представлена ниже.

Показатель	Фактор 1	Фактор 2
Счет в уме	0,97	0,20
Числовые ряды	0,86	0,20
Осведомленность	0,18	0,76
Словарный запас	0,09	0,74
Сходство	0,26	0,69
Собственное значение фактора	1,79	1,70
Процент общей дисперсии по фактору	0,36	0,34

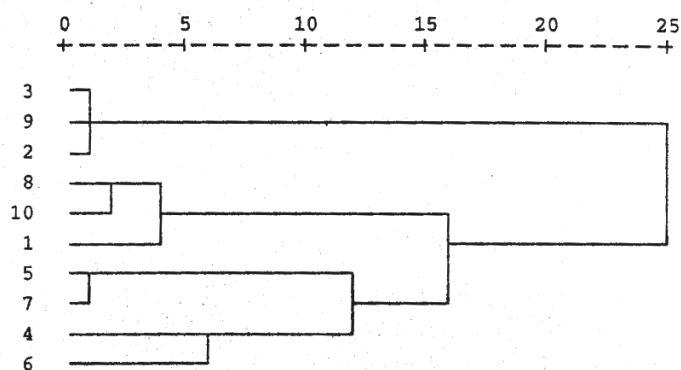
Проинтерпретировать полученные данные, присвоить название факторам [18].

5. Несколько десятков испытуемых были протестированы на предмет некоторых черт характера и темперамента с использованием тестов Айзенка, Шмишека и ЧХТ, по которым определялось 18 отдельных психологических характеристик. Матрица упорядоченных факторных нагрузок представлена ниже.

Показатель	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 3	Фактор 4	Фактор 5
Нейротизм	0,781		0,395		
Импульсивность	0,779				
Тревожность	0,727				
Циклотимность	0,727				-0,292
Сила НС по торможению	-0,580	-0,444			
Подвижность нервных процессов	0,522		0,427		
Эмоциональная лабильность		0,788			
Экстраверсия		0,768			
Дистимность		-0,742			
Гипертимность		0,704		0,334	
Демонстративность		0,530		0,311	-0,437
Сензитивность		0,259	0,753		
Чувствительность нервной системы			0,685		
Педантичность		0,459	0,558		
Сила НС по возбуждению				0,676	
Развитие 2-й сигнальной системы				0,622	
Уровень притязаний	0,277	0,338		0,569	
Искренность высказываний					-0,731

Проинтерпретировать полученные данные [14].

6. Десяти студентам предложили с помощью 10-балльной шкалы оценить проведенное с ними занятие по двум критериям: увлекательность и полезность. Результаты исследования были подвергнуты кластерному анализу. Проинтерпретировать дендрограмму, построенную по его результатам [18].



7. В исследовании 10 менеджеров оценивались по методике экспертных оценок психологических характеристик личности руководителя. Для оценки связи тактичности (X) с требовательностью (Y) и критичностью (Z) был применен множественный регрессионный анализ. В результате получили следующее уравнение регрессии:

$$X = 18,47 + 1,59 \cdot Y + 0,43 \cdot Z.$$

Проинтерпретировать полученное уравнение [9].

8. Используя данные предыдущей задачи, оценить: а) как изменится экспертная оценка требовательности при постоянной величине критичности, если оценка тактичности увеличится на 1 балл? б) как изменится экспертная оценка критичности при постоянной величине требовательности, если оценка тактичности увеличится на 1 балл [9].

9. Используя уравнение регрессии $X = 18,47 + 1,59 \cdot Y + 0,43 \cdot Z$, определить ожидаемую экспертную оценку тактичности X , если: а) оценка требовательности $Y = 10$, а оценка критичности $Z = 8$; б) оценка требовательности $Y = 15$, а оценка критичности $Z = 14$ [9].

10. Психолог хочет подобрать регрессионную модель, адекватную экспериментальным данным, полученным в исследовании зависимости между успешностью решения третьего субтеста методики Векслера и уровнем знаний по алгебре. В результате компьютерной обработки данных было получено четыре модели криволинейной регрессии.

Модель:	Формула	Коэффициенты	Уровни значимости коэффициентов
экспонента	$\bar{Y}_x = \text{EXP}(a_0 + a_1 \cdot X)$,	$a_0 = 1, a_1 = 0,022$	$p_1 = 0,535$
степенная	$\bar{Y}_x = a_0 + a_i \cdot X_i^{n^2}$	$a_0 = -5,29, a_1 = 7,02, a_2 = 0,0987$	$p_1 = 0,02, p_2 = 0,991$
полином	$\bar{Y}_x = a_0 + a_1 \cdot X^1 + a_2 \cdot X^2 + a_3 \cdot X^3$	$a_0 = -29,8, a_1 = 7,28, a_2 = -0,488, a_3 = 0,0103$	$p_1 = 0,143, p_2 = 0,20, p_3 = 0,272$
парабола	$\bar{Y}_x = a_0 + a_1 \cdot X^1 + a_2 \cdot X^2$	$a_0 = -9,88, a_1 = 2,24, a_2 = -0,0839$	$p_1 = 0,0186, p_2 = 0,0201$

Какая из описанных моделей адекватна экспериментальным данным? Почему [9]?

11. При проведении корреляционного анализа матрицы наблюдений, взятой из Приложения 8, получена следующая матрица интеркорреляций (нули и запятые в коэффициентах корреляции опущены):

	Осведомленность	Скрытые фигуры	Пропущенные слова	Арифметика	Понятливость	Исключение изображения	Аналогии	Числовые ряды	Умозаключения	Геометрическое сложение	Заучивание слов	Средний IQ	Вертированность	Нейротизм
Осведомленность	1													
Скрытые фигуры	243	1												
Пропущенные слова	330	330	1											
Арифметика	102	196	165	1										
Понятливость	119	236	208	164	1									
Исключение изображения	269	101	258	-055	230	1								
Аналогии	027	-069	086	163	-073	009	1							
Числовые ряды	088	140	239	384	175	036	227	1						
Умозаключения	005	177	291	044	152	-001	598	207	1					
Геометрическое сложение	028	303	271	215	272	299	261	409	295	1				
Заучивание слов	609	060	499	-056	320	372	-041	-020	-063	-025	1			
Средний IQ	450	375	654	324	463	425	468	518	516	690	440	1		
Вертированность	051	069	234	-319	131	349	-064	-333	224	220	224	198	1	
Нейротизм	-080	204	-146	238	024	017	094	467	039	481	-306	166	-294	1

Коэффициенты корреляции, для которых выполняется условие $p \leq 0,1$, отмечены одной звездочкой. Двумя и тремя звездочками маркируются коэффициенты, для которых выполняются условия $p \leq 0,05$ и $p \leq 0,01$ соответственно. Проанализировать полученную матрицу [13].

Практическое задание. Предложить вариант психологического исследования, при обработке данных которого можно применить факторный анализ. Составить бланк матрицы наблюдений (числовые значения заносить в таблицу не обязательно) [13].

Практическое занятие № 16

Математические модели в психологии

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Вклад зарубежных ученых в развитие математических методов, используемых в психологии.
2. Вклад русских ученых в развитие математических методов, используемых в психологии.
3. Методологические проблемы использования математики в психологической науке.
4. Модели и требования к ним.
5. Функции моделей.
6. Виды моделей.
7. Моделирование и его особенности в психологии.
8. Психологическое моделирование и его характеристика.
9. Моделирование психических процессов с помощью описательных моделей и его результаты.
10. Моделирование физиологических процессов с помощью действующих моделей.
11. Моделирование познавательных психических процессов.
12. Моделирование регулятивных процессов психики и личности.
13. Моделирование искусственного интеллекта.
14. Нетрадиционные методы моделирования.
15. Обработка результатов психологического исследования с помощью компьютерных методов.

Задачи и упражнения

1. Составить словарь понятий по теме.
2. Подготовить и обсудить рефераты на тему:
 - «Моделирование физиологических основ психики»;
 - «Моделирование психических познавательных процессов»;
 - «Моделирование регулятивных процессов и личности»;

- «Модели интеллекта в психологии»;
- «Моделирование индивидуального и группового поведения»;
- «Нетрадиционные методы моделирования».

3. Изучить содержание раздела «Введение» учебного пособия «Математическое моделирование в психологии» [17] и выполнить следующие задания:

- а) охарактеризовать математическую психологию как науку;
- б) представить этапы развития математической психологии;
- в) выделить основные тенденции развития математической психологии;
- г) охарактеризовать основные направления математического моделирования психических процессов;
- д) провести сравнительный анализ исследований в области математического моделирования в США и России.

«...Математическая психология – это раздел теоретической психологии, использующий для построения теорий и моделей математический аппарат.

“В рамках математической психологии должен осуществляться принцип абстрактно-аналитического исследования, в котором изучается не конкретное содержание субъективных моделей действительности, а общие формы и закономерности психической деятельности”¹.

Объект математической психологии: естественные системы, обладающие психическими свойствами; содержательные психологические теории и математические модели таких систем.

Предмет – разработка и применение формального аппарата для адекватного моделирования систем, обладающих психическими свойствами.

Метод – математическое моделирование.

Процесс математизации психологии начался с момента её выделения в экспериментальную дисциплину. Этот процесс проходил ряд этапов.

Первый – применение математических методов для анализа и обработки результатов экспериментального исследования, а также выведения простых законов (конец XIX – начало XX века). Это время разработки закона научения, психофизического закона, метода факторного анализа.

Второй (40–50-е годы) – создание моделей психических процессов и поведения человека с использованием ранее разработанного математического аппарата.

Третий (60-е годы – по настоящее время) – выделение математической психологии в отдельную дисциплину, основная цель которой – разработка математического аппарата для моделирования психических процессов и анализа данных психологического эксперимента...

Часто математическую психологию отождествляют с математическими методами, что является ошибочным. Математическая психология и математические методы соотносятся друг с другом так же, как теоретическая и экспериментальная психология.

Термин «математическая психология» стал применяться с появлением в 1963 г. в США «Руководства по математической психологии»¹. В эти же годы здесь начинает издаваться журнал “Journal of Mathematical Psychology”.

Проведённый в лаборатории математической психологии ИП РАН анализ работ позволил выделить основные тенденции развития математической психологии.

В 60–70-е гг. получили широкое распространение работы по моделированию обучения, памяти, обнаружения сигналов, поведения, принятия решений. Для их разработки использовался математический аппарат вероятностных процессов, теории игр, теории полезности и другие. Было завершено создание математической теории обучения. Наиболее известны модели Р. Буша, Ф. Мостеллера, Г. Бауэра, В. Эстеса, Р. Аткинсона. (В последующие годы на-

¹ Handbook, 1963.

блюдается снижение количества работ по данной проблематике.) Появляется множество математических моделей по психофизике, например С. Стивенса, Д. Экмана, Ю. Забродина, Дж. Светса, Д. Грина, М. Михайлевской, Р. Льюиса). В работах по моделированию группового и индивидуального поведения, в том числе в ситуации неопределённости, использовались теории полезности, игр, риска и стохастические процессы. Это модели Дж. фон Неймана, М. Цетлина, В. Крылова, А. Тверского, Р. Льюиса. В рассматриваемый период создавались глобальные математические модели основных психических процессов.

В период до 80-х годов появляются первые работы по психологическим измерениям: осуществляется разработка методов факторного анализа, аксиоматики и моделей измерения, предлагаются различные классификации шкал, ведётся работа над созданием методов классификации и геометрического представления данных, строятся модели, основанные на лингвистической переменной (Л. Заде).

В 80-е годы особое внимание уделяется уточнению и развитию моделей, связанных с разработкой аксиоматики различных теорий.

В психофизике это:

- современная теория обнаружения сигналов (Д. Светс, Д. Грин);
- структуры сенсорных пространств (Ю. Забродин, Ч. Измаилов);
- случайных блужданий (Р. Льюис, 1986);
- различия Линка и др.

В области моделирования группового и индивидуального поведения:

- модель решения и действия в психомоторных актах (Г. Корнеев, 1980);
- модель целенаправленной системы (Г. Корнеев);
- «деревья» предпочтения (А. Тверской);
- модель системы знаний (Дж. Грино);
- вероятностная модель научения (А. Дрынков, 1985);
- модель поведения в диадном взаимодействии (Т. Савченко, 1986);
- моделирование процессов поиска и извлечения информации из памяти (Р. Шифрин, 1974);
- моделирование стратегий принятия решений в процессе обучения (Р. Венда, 1982), и др.

В теории измерения:

- множество моделей многомерного шкалирования (МШ), в которых прослеживается тенденция к снижению точности описания сложных систем – модели предпочтения, неметрическое шкалирование, шкалирование в псевдоевклидовом пространстве, МШ на «размытых» множествах (А. Дрынков, Т. Савченко, В. Плюта);
- модели конфирматорного анализа, позволяющие формировать культуру проведения экспериментального исследования;
- применение математического моделирования в психодиагностике (А. Анастаси, П. Клайн, Д. Кендалл, В. Дружинин).

В 90-х годах глобальные математические модели психических процессов почти не разрабатываются, однако значительно возрастает количество работ по уточнению и дополнению существующих моделей. Продолжает интенсивно развиваться теория измерений, теория конструирования тестов; разрабатываются новые шкалы, более адекватные реальности (Д. Льюис, П. Саппес, А. Тверски, А. Марли); широко внедряется в психологию математический подход к моделированию.

Если в 70-е годы работы по математической психологии в основном появлялись в США, то в 80-е наблюдается бурный рост её развития в России, в настоящее время, к сожалению, заметно снизившийся из-за недостаточного финансирования фундаментальной науки.

Наиболее значимые модели появились в 70-е – начале 80-х годов, далее они дополнялись и уточнялись. В 80-е годы интенсивно развивалась теория измерений. Эта работа продолжается и сегодня. Особенно важно, что многие методы многомерного анализа получили

широкое применение в экспериментальных исследованиях; появляется множество специально ориентированных на психологов программ анализа данных психологического тестирования.

В США большое внимание уделяется чисто математическим вопросам моделирования. В России же, наоборот, математические модели зачастую не обладают достаточной строгостью, что приводит к неадекватному описанию реальности.

В математической психологии принято выделять два направления:

- математические модели;
- математические методы.

Мы нарушили эту традицию, так как считаем, что нет необходимости выделять отдельно методы анализа данных психологического эксперимента. Они являются средством построения модели: классификации, латентных структур, семантических пространств и других...

4. Проанализировать модель интеллекта, предложенную Г. Айзенком (1979), определить вид модели, используя различные классификации [2, с. 203]: «...Схематично модель выглядит как куб, каждая из плоскостей которого представляет разные модальности:

- интеллектуальные процессы (мышление, память, восприятие и т.д.);
- тестовый материал (вербальный, числовой, пространственный и т.д.);
- качество – скорость и сила интеллектуальных процессов, при этом сила (мощь) интеллекта складывается из настойчивости в выполнении заданий и склонности к проверке ошибок.

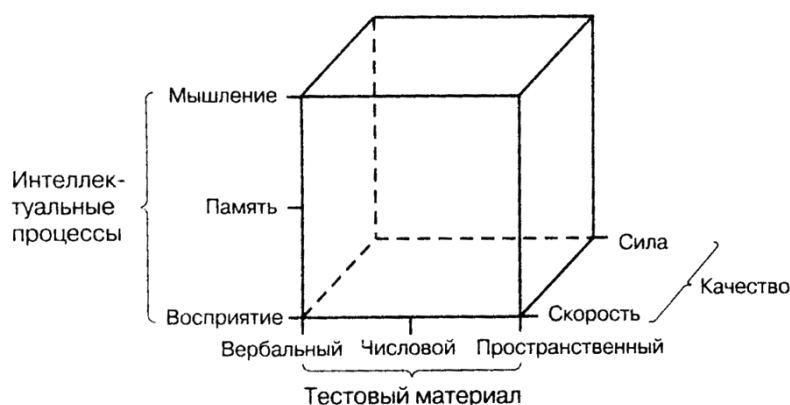


Рис. Модель интеллекта по Г. Айзенку

Таким образом, предполагается существование различных факторов интеллекта ($3 \times 3 \times 2 = 18$), каждый из которых включает сочетание трех условных обозначений, соответствующих виду интеллектуального процесса, форме тестового материала и качеству интеллекта. Например, способность легко распознавать в изображениях «зашумленные» предметы: интеллектуальный процесс – восприятие, тестовый материал – пространственный, качество – скорость и сила. В результате можно выделять различные факторы интеллекта и разрабатывать тесты, определяющие их...».

Практическое задание. В соответствии с общей методологической схемой применения математических методов в психологии, предложенной Г.В. Суходольским, представить научно-исследовательский цикл курсовой работы по психологии.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОГРАММИРОВАННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Блок 10. Сопоставление совокупностей по уровню и однородности признака

1. Все задачи, которые решает экспериментатор в ходе психологического исследования, могут быть сведены:

- А) к трем типам задач;
- Б) к четырем типам задач;
- В) к пяти типам задач;
- Г) к шести типам задач.

2. Выявление различий в уровне тревожности младших школьников, воспитывающихся в условиях семьи и в условиях интерната – это решение задачи:

- А) на оценку сдвига в значениях исследуемого признака;
- Б) на выявление различий в уровне исследуемого признака;
- В) на выявление различий в распределении признака;
- Г) на выявление степени согласованности изменений.

3. Сравнение показателей тревожности у младших школьников до проведения психологического тренинга и после него – это решение задачи:

- А) на оценку сдвига в значениях исследуемого признака;
- Б) на выявление различий в уровне исследуемого признака;
- В) на выявление различий в распределении признака;
- Г) на выявление степени согласованности изменений.

4. Выявление взаимосвязи между ростом и весом испытуемых – это решение задачи:

- А) на оценку сдвига в значениях исследуемого признака;
- Б) на выявление различий в уровне исследуемого признака;
- В) на выявление различий в распределении признака;
- Г) на выявление степени согласованности изменений.

5. Выявление влияния на профессиональное выгорание педагогов стажа работы и пола – это решение задачи:

- А) на оценку сдвига в значениях исследуемого признака;
- Б) на выявление различий в уровне исследуемого признака;
- В) на выявление различий в распределении признака;
- Г) на анализ изменений признака под влиянием контролируемых условий.

6. Сравнение распределений выбора профиля обучения юношами и девушками – это решение задачи:

- А) на оценку сдвига в значениях исследуемого признака;
- Б) на выявление различий в уровне исследуемого признака;
- В) на выявление различий в распределении признака;
- Г) на анализ изменений признака под влиянием контролируемых условий.

7. Если распределение исследуемого признака отлично от нормального, то для выявления различий в уровне признака не используется:

- А) критерий Манна-Уитни;
- Б) критерий Розенбаума;
- В) критерий Стьюдента для независимых выборок;
- Г) критерий φ^* -угловое преобразование Фишера.

8. Для сравнения трех и более выборок по уровню и однородности признака используется:

- А) критерий Манна-Уитни;
- Б) критерий Розенбаума;
- В) критерий Стьюдента для независимых выборок;
- Г) критерий Крускала-Уоллиса.

9. Для выявления направления изменений признака при переходе от выборки к выборке в случае сопоставления не менее трех выборок используется:

- А) критерий Манна-Уитни;
- Б) критерий Стьюдента для независимых выборок;
- В) критерий тенденций Джонкира;
- Г) критерий Крускала-Уоллиса.

10. Для вычисления эмпирического значения критерия Манна-Уитни используется формула:

- А) $U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} - T_x$;
- Б) $Q = S_1 + S_2$;
- В) $H = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum \frac{T_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N+1)$;
- Г) $S = 2A - B$.

11. Для вычисления эмпирического значения критерия Крускала-Уоллиса используется формула:

- А) $U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} - T_x$;
- Б) $Q = S_1 + S_2$;
- В) $H = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum \frac{T_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N+1)$;
- Г) $S = 2A - B$.

12. Для вычисления эмпирического значения критерия Розенбаума используется формула:

- А) $U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} - T_x$;
- Б) $Q = S_1 + S_2$;
- В) $H = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum \frac{T_i^2}{n_i} - 3 \cdot (N+1)$;
- Г) $S = 2A - B$.

13. При проверке статистической гипотезы о достоверности различий в уровне признака установлено, что эмпирическое значение используемого критерия превышает критическое при $p \leq 0,05$. Для какого из критериев этот факт является основанием для принятия H_0 :

- А) критерий Манна-Уитни;
- Б) критерий Розенбаума;
- В) критерий Стьюдента для независимых выборок;
- Г) критерий φ^* -угловое преобразование Фишера.

14. Критическое значение критерия Манна-Уитни для $n_1 = 10$ и $n_2 = 12$ равно 34 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно принять:

- А) $U_{эмп} = 35$;
- Б) $U_{эмп} = 33$;
- В) $U_{эмп} = 32$;
- Г) $U_{эмп} = 30$.

15. Критическое значение критерия Розенбаума для $n_1 = 11$ и $n_2 = 12$ равно 6 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно отвергнуть:

- А) $Q_{эмп} = 4$;
- Б) $Q_{эмп} = 5$;
- В) $Q_{эмп} = 6$;
- Г) $Q_{эмп} = 0$.

16. Критическое значение критерия Стьюдента для независимых выборок при $\nu = 12$ равно 2,18 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно принять:

- А) $t_{эмп} = 2,08$;
- Б) $t_{эмп} = 2,19$;
- В) $t_{эмп} = 2,81$;
- Г) $t_{эмп} = 2,88$.

17. Критическое значение критерия тенденций Джонкира для трех групп, в каждой из которых шесть испытуемых, равно 42 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно принять:

- А) $S_{эмп} = 40$;
- Б) $S_{эмп} = 45$;
- В) $S_{эмп} = 50$;
- Г) $S_{эмп} = 55$.

18. Принятие решения о выборе критерия для сопоставления совокупностей по уровню и однородности признака не зависит от такого условия, как:

- А) объем выборок;
- Б) количество выборок;
- В) уровень значимости;
- Г) характер распределения признака.

Блок 11. Оценка достоверности сдвига в значениях исследуемого признака

1. Сопоставление показателей, полученных по одним и тем же методикам у одних и тех же испытуемых – это:

- А) ситуационный сдвиг;
- Б) временной сдвиг;
- В) умозрительный сдвиг;
- Г) структурный сдвиг.

2. Сопоставление разных показателей одних и тех же испытуемых, если они измерены в одних и тех же единицах по одной и той же шкале – это:

- А) ситуационный сдвиг;
- Б) временной сдвиг;
- В) умозрительный сдвиг;
- Г) структурный сдвиг.

3. Сопоставление показателей испытуемых, полученных в обычных и воображаемых условиях – это:

- А) ситуационный сдвиг;
- Б) временной сдвиг;
- В) умозрительный сдвиг;
- Г) структурный сдвиг.

4. Сопоставление показателей, произведенных в экспериментальной и контрольной группах до и после воздействия – это:

- А) ситуационный сдвиг;
- Б) временной сдвиг;
- В) сдвиг под влиянием контролируемых и неконтролируемых воздействий;
- Г) структурный сдвиг.

5. Сопоставление показателей тревожности, измеренной у студентов перед экзаменом и после него – это:

- А) ситуационный сдвиг;
- Б) временной сдвиг;
- В) сдвиг под влиянием контролируемых и неконтролируемых воздействий;
- Г) структурный сдвиг.

6. Сопоставление показателей вербального и невербального интеллекта, измеренных по шкале Векслера – это:

- А) ситуационный сдвиг;
- Б) временной сдвиг;
- В) сдвиг под влиянием контролируемых и неконтролируемых воздействий;
- Г) структурный сдвиг.

7. Сопоставление показателей агрессивности подростков, произведенных до тренинга и после него – это:

- А) ситуационный сдвиг;
- Б) временной сдвиг;
- В) сдвиг под влиянием контролируемых и неконтролируемых воздействий;
- Г) структурный сдвиг.

8. Сопоставление времени решения задачи учащимися в условиях присутствия экспериментатора и без него – это:

- А) ситуационный сдвиг;
- Б) временной сдвиг;
- В) сдвиг под влиянием контролируемых и неконтролируемых воздействий;
- Г) структурный сдвиг.

9. Для оценки достоверности сдвига признака, который распределен по нормальному закону, используется:

- А) критерий Вилкоксона;
- Б) критерий знаков;
- В) критерий Стьюдента для зависимых выборок;
- Г) критерий Стьюдента для независимых выборок.

10. Для оценки достоверности сдвига в условиях трех и более замеров, произведенных на одной и той же выборке, используется:

- А) критерий Вилкоксона;
- Б) критерий знаков;
- В) критерий Стьюдента для зависимых выборок;
- Г) критерий Фридмана.

11. Для выявления направления изменения признака, измеренного на одной и той же выборке в трех и более условиях, используется:

- А) критерий Вилкоксона;
- Б) критерий φ^* -угловое преобразование Фишера;
- В) критерий тенденций Пейджа;
- Г) критерий Фридмана.

12. Для вычисления эмпирического значения критерия Стьюдента в случае зависимых выборок используется формула:

А) $\chi^2_{r_{эм}} = \frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \sum (T_i)^2 - 3n \cdot (c+1);$

Б) $L = \sum (T_j \cdot j);$

В) $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}};$

Г) $t = \frac{\sum d_i}{\sqrt{\frac{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n-1}}}.$

13. Для вычисления эмпирического значения критерия Фридмана используется формула:

А) $\chi^2_{r_{эм}} = \frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \sum (T_i)^2 - 3n \cdot (c+1);$

Б) $L = \sum (T_j \cdot j);$

В) $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}};$

Г) $t = \frac{\sum d_i}{\sqrt{\frac{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n-1}}}.$

14. Для вычисления эмпирического значения критерия тенденций Пейджа используется формула:

$$\text{А) } \chi^2_{r_{\text{эмп}}} = \frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \sum (T_i)^2 - 3n \cdot (c+1);$$

$$\text{Б) } L = \sum (T_j \cdot j);$$

$$\text{В) } t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}};$$

$$\text{Г) } t = \frac{\sum d_i}{\sqrt{\frac{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}{n-1}}}.$$

15. При проверке статистической гипотезы о достоверности сдвига значений признака установлено, что эмпирическое значение используемого критерия превышает критическое при $p \leq 0,05$. Для какого из критериев этот факт является основанием для принятия H_0 :

А) критерий Фридмана;

Б) критерий Вилкоксона;

В) критерий Стьюдента для независимых выборок;

Г) критерий φ^* -угловое преобразование Фишера.

16. Критическое значение критерия знаков для $n = 20$ равно 5 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно принять:

А) $G_{\text{эмп}} = 2;$

Б) $G_{\text{эмп}} = 3;$

В) $G_{\text{эмп}} = 4;$

Г) $G_{\text{эмп}} = 6.$

17. Критическое значение критерия Вилкоксона для $n = 11$ равно 13 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно отбросить:

А) $T_{\text{эмп}} = 12;$

Б) $T_{\text{эмп}} = 14;$

В) $T_{\text{эмп}} = 15;$

Г) $T_{\text{эмп}} = 16.$

18. Критическое значение критерия Стьюдента для зависимых выборок при $\nu = 20$ равно 2,09 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно принять:

А) $t_{\text{эмп}} = 2,99;$

Б) $t_{\text{эмп}} = 2,19;$

В) $t_{\text{эмп}} = 2,11;$

Г) $t_{\text{эмп}} = 2,01.$

Блок 12. Выявление различий в распределениях признака

1. Для выявления различий в распределениях признака используется:

- А) критерий Манна-Уитни;
- Б) критерий Колмогорова-Смирнова;
- В) критерий Крускала-Уоллиса;
- Г) критерий Фридмана.

2. Для выявления различий в распределениях признака используется:

- А) критерий Вилкоксона;
- Б) критерий Джонкира;
- В) критерий Пирсона
- Г) критерий Фридмана.

3. Для обнаружения точки максимального расхождения между двумя распределениями применяется:

- А) критерий Манна-Уитни;
- Б) критерий Пирсона;
- В) критерий Колмогорова-Смирнова;
- Г) критерий Фридмана.

4. Если измерение признака проведено в количественных шкалах, то для выявления различий в распределениях признака используется:

- А) критерий Манна-Уитни;
- Б) критерий Колмогорова-Смирнова;
- В) критерий Пирсона;
- Г) критерий Фридмана.

5. При вычислении эмпирического значения критерия Пирсона нужно вносить поправку на непрерывность, если:

- А) объем выборки $n > 20$;
- Б) объем выборки $n > 30$;
- В) число степеней свободы $\nu = 1$;
- Г) число степеней свободы $\nu = 5$.

6. Для вычисления эмпирического значения критерия Пирсона применяется формула:

А) $\chi_r^2 = \frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \sum (T_i)^2 - 3n \cdot (c+1)$;

Б) $\lambda = d_{\max} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$;

В) $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$;

Г) $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f_{\text{э}i} - f_m)^2}{f_m}$.

7. Для вычисления эмпирического значения критерия Колмогорова-Смирнова применяется формула:

$$\text{А) } \chi_r^2 = \frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \sum (T_i)^2 - 3n \cdot (c+1);$$

$$\text{Б) } \lambda = d_{\max} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}};$$

$$\text{В) } t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}};$$

$$\text{Г) } \chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f_{\text{эi}} - f_m)^2}{f_m}.$$

8. Критическое значение критерия Пирсона при $\nu = 15$ равно 24,996 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно отбросить:

$$\text{А) } \chi_{\text{эмп}}^2 = 24,666;$$

$$\text{Б) } \chi_{\text{эмп}}^2 = 24,669;$$

$$\text{В) } \chi_{\text{эмп}}^2 = 24,699;$$

$$\text{Г) } \chi_{\text{эмп}}^2 = 24,999.$$

9. Критическое значение критерия Пирсона при $\nu = 35$ равно 57,342 ($p \leq 0,01$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно принять:

$$\text{А) } \chi_{\text{эмп}}^2 = 57,333;$$

$$\text{Б) } \chi_{\text{эмп}}^2 = 57,344;$$

$$\text{В) } \chi_{\text{эмп}}^2 = 57,355;$$

$$\text{Г) } \chi_{\text{эмп}}^2 = 57,366.$$

10. Критическое значение критерия Колмогорова-Смирнова при $n = 60$ равно 0,1753 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно отбросить:

$$\text{А) } d_{\text{эмп}} = 0,1750;$$

$$\text{Б) } d_{\text{эмп}} = 0,1751;$$

$$\text{В) } d_{\text{эмп}} = 0,1752;$$

$$\text{Г) } d_{\text{эмп}} = 0,1753.$$

Блок 13. Многофункциональные критерии

1. К многофункциональным статистическим критериям относится:

А) критерий Колмогорова-Смирнова;

Б) критерий «угловое преобразование Фишера»;

В) критерий Пирсона;

Г) критерий Крускала-Уоллиса.

2. К многофункциональным статистическим критериям относится:

А) критерий Колмогорова-Смирнова;

Б) критерий Пирсона;

В) критерий Крускала-Уоллиса;

Г) биномиальный критерий.

3. Многофункциональные критерии неприменимы для решения задачи:

- А) на оценку сдвига в значениях исследуемого признака;
- Б) на выявление различий в уровне исследуемого признака;
- В) на выявление различий в распределении признака;
- Г) на выявление степени согласованности изменений.

4. Для вычисления эмпирического значения критерия «угловое преобразование Фишера» применяется формула:

А) $\varphi^* = (\varphi_1 - \varphi_2) \times \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$;

Б) $\lambda = d_{\max} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$;

В) $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$;

Г) $Z = \frac{(X \pm 0,5) - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$.

5. Для вычисления эмпирического значения биномиального критерия используется формула:

А) $\varphi^* = (\varphi_1 - \varphi_2) \times \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$;

Б) $\lambda = d_{\max} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$;

В) $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$;

Г) $Z = \frac{(X \pm 0,5) - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$.

6. Критическое значение критерия «угловое преобразование Фишера» равно 1,64 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно отбросить:

- А) $\varphi^*_{\text{эмп}} = 0,64$;
- Б) $\varphi^*_{\text{эмп}} = 1,40$;
- В) $\varphi^*_{\text{эмп}} = 1,60$;
- Г) $\varphi^*_{\text{эмп}} = 1,66$.

7. Критическое значение критерия «угловое преобразование Фишера» равно 2,31 ($p \leq 0,01$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно принять:

- А) $\varphi^*_{\text{эмп}} = 2,50$;
- Б) $\varphi^*_{\text{эмп}} = 2,40$;
- В) $\varphi^*_{\text{эмп}} = 2,31$;
- Г) $\varphi^*_{\text{эмп}} = 2,30$.

8. Критическое значение биномиального критерия равно 1,64 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно принять:

- А) $Z_{\text{эмп}} = 0,65$;
- Б) $Z_{\text{эмп}} = 1,64$;
- В) $Z_{\text{эмп}} = 2,65$;
- Г) $Z_{\text{эмп}} = 3,65$.

9. Критическое значение биномиального критерия равно 2,31 ($p \leq 0,01$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно отбросить:

- А) $Z_{\text{эмп}} = 1,30$;
- Б) $Z_{\text{эмп}} = 2,20$;
- В) $Z_{\text{эмп}} = 2,31$;
- Г) $Z_{\text{эмп}} = 2,30$.

Блок 14. Дисперсионный анализ

1. Дисперсионный анализ используется для решения задачи:

- А) на оценку сдвига в значениях исследуемого признака;
- Б) на выявление различий в уровне исследуемого признака;
- В) на анализ изменений признака под влиянием контролируемых условий;
- Г) на выявление степени согласованности изменений.

2. Дисперсионный анализ позволяет установить причинно-следственные связи, рассматривая в качестве причины (фактора):

- А) зависимые переменные;
- Б) контролируемые переменные;
- В) независимые переменные;
- Г) скрытые переменные.

3. Дисперсионный анализ позволяет установить причинно-следственные связи, рассматривая в качестве следствия (результативного признака):

- А) зависимые переменные;
- Б) контролируемые переменные;
- В) независимые переменные;
- Г) скрытые переменные.

4. Подготовка данных к дисперсионному анализу включает следующие этапы:

- А) создание комплекса, уравнивание комплекса, ранжирование данных, преобразование данных для упрощения расчетов;
- Б) создание комплекса, уравнивание комплекса, проверка нормальности распределения результативного признака, ранжирование данных;
- В) создание комплекса, ранжирование данных, проверка нормальности распределения результативного признака, преобразование данных для упрощения расчетов;
- Г) создание комплекса, уравнивание комплекса, проверка нормальности распределения результативного признака, преобразование данных для упрощения расчетов.

5. Два комплекта гипотез (о влиянии фактора А и фактора индивидуальных различий) выдвигается при применении:

- А) однофакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок;
- Б) однофакторного дисперсионного анализа для независимых выборок;
- В) двухфакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок;
- Г) двухфакторного дисперсионного анализа для независимых выборок.

6. Три комплекта гипотез (о влиянии фактора А, фактора В и влиянии взаимодействия факторов) выдвигается при применении:

- А) однофакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок;
- Б) однофакторного дисперсионного анализа для независимых выборок;
- В) двухфакторного дисперсионного анализа для зависимых выборок;
- Г) двухфакторного дисперсионного анализа для независимых выборок.

7. Для анализа влияния уровня достатка людей (высокий, средний и низкий) на отношение к программе повышения пенсий используют:

- А) однофакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок;
- Б) однофакторный дисперсионный анализ для независимых выборок;
- В) двухфакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок;
- Г) двухфакторный дисперсионный анализ для независимых выборок.

8. Для выявления зависимости уровня ценностно-ориентационного единства внутри пяти отрядов от длительности пребывания в оздоровительном лагере (начало, середина и конец смены) используют:

- А) однофакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок;
- Б) однофакторный дисперсионный анализ для независимых выборок;
- В) двухфакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок;
- Г) двухфакторный дисперсионный анализ для независимых выборок.

9. Для анализа того, как влияет пол педагогов и стаж педагогической деятельности (0-5 лет, 6-10 лет, 11-15 лет) на степень удовлетворенности профессией, используют:

- А) однофакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок;
- Б) однофакторный дисперсионный анализ для независимых выборок;
- В) двухфакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок;
- Г) двухфакторный дисперсионный анализ для независимых выборок.

10. Для анализа того, как влияет сложность задачи (система уравнений с двумя и тремя неизвестными) и условия ее решения (в присутствии педагога и в его отсутствие) на время решения задачи одной и той же группой учащихся, используют:

- А) однофакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок;
- Б) однофакторный дисперсионный анализ для независимых выборок;
- В) двухфакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок;
- Г) двухфакторный дисперсионный анализ для независимых выборок.

11. Критическое значение критерия Фишера для числа степеней свободы $df_1 = 2$ и $df_2 = 15$ равно 3,68 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно принять:

А) $F_{\text{эмп}} = 5,65$;

Б) $F_{\text{эмп}} = 5,64$;

В) $F_{\text{эмп}} = 4,65$;

Г) $F_{\text{эмп}} = 3,65$.

12. Критическое значение критерия Фишера для числа степеней свободы $df_1 = 2$ и $df_2 = 8$ равно 4,46 ($p \leq 0,05$). При каком эмпирическом значении этого критерия нулевую гипотезу H_0 можно отвергнуть:

А) $F_{\text{эмп}} = 4,64$;

Б) $F_{\text{эмп}} = 4,34$;

В) $F_{\text{эмп}} = 3,45$;

Г) $F_{\text{эмп}} = 3,25$.

Блок 15. Многомерный статистический анализ

1. Классификация методов многомерного анализа в соответствии с интеллектуальной операцией, используемой для преобразования исходной информации – это классификация:

А) по назначению метода;

Б) по способу сопоставления данных;

В) по виду исходных эмпирических данных;

Г) по способу преобразования данных.

2. Классификация методов многомерного анализа, основанная на исходном предположении о структуре данных (пропорциональности или сходстве) – это классификация:

А) по назначению метода;

Б) по способу преобразования данных;

В) по виду исходных эмпирических данных;

Г) по способу сопоставления данных.

3. Классификация методов многомерного анализа в соответствии с тем, что рассматривается в качестве анализируемых данных (признаки объектов или попарные сходства (различия) между объектами) – это классификация:

А) по назначению метода;

Б) по способу сопоставления данных;

В) по виду исходных эмпирических данных;

Г) по способу преобразования данных.

4. Метод многомерного анализа, задачами которого является сокращение числа переменных и определение структуры взаимосвязей между ними – это:

А) факторный анализ;

Б) кластерный анализ;

В) регрессионный анализ;

Г) дискриминантный анализ.

5. Метод многомерного анализа, который используется для упорядочивания объектов и объединения их в группы схожих объектов в выборке данных – это:

А) факторный анализ;

Б) кластерный анализ;

В) регрессионный анализ;

Г) дискриминантный анализ.

6. Метод многомерного анализа, который позволяет предсказывать значения зависимой переменной, измеренной в метрических шкалах, по значениям совокупности независимых переменных и определять, какие независимые переменные наиболее важны для предсказания – это:

- А) факторный анализ;
- Б) кластерный анализ;
- В) регрессионный анализ;
- Г) дискриминантный анализ.

7. Метод многомерного анализа, который позволяет предсказывать значения зависимой переменной, измеренной в номинальной шкале, по значениям совокупности независимых переменных и определять, какие независимые переменные наиболее важны для предсказания – это:

- А) кластерный анализ;
- Б) корреляционный анализ;
- В) регрессионный анализ;
- Г) дискриминантный анализ.

8. Метод многомерного анализа, который позволяет осуществлять анализ связей между тремя и более рядами данных – это:

- А) кластерный анализ;
- Б) корреляционный анализ;
- В) регрессионный анализ;
- Г) многомерное шкалирование.

9. Метод многомерного анализа, который позволяет осуществлять поиск и интерпретацию латентных переменных, позволяющих объяснить сходства между объектами, заданными точками в исходном пространстве признаков – это:

- А) факторный анализ;
- Б) корреляционный анализ;
- В) кластерный анализ;
- Г) многомерное шкалирование.

Блок 16. Математические модели в психологии

1. Впервые идею о возможности и необходимости применения математических методов в психологии обосновал:

- А) Г. Лейбниц;
- Б) И.Ф. Гербарт;
- В) М.В. Дробиш;
- Г) В. Вундт.

2. Автор монографии «Первоосновы математической психологии», в которой представлены математические модели представлений, является:

- А) Г. Лейбниц;
- Б) И.Ф. Гербарт;
- В) М.В. Дробиш;
- Г) В. Вундт.

3. Основы корреляционного анализа и первый метод факторного анализа разработал:

- А) Ф. Гальтон;
- Б) К. Пирсон;
- В) Ч. Спирмен;
- Г) Л. Тернстоун.

4. Психометрическую шкалу для фиксации и анализа многомерных измерений уровня развития общих способностей «Психологические профили» разработал:

- А) Г.И. Челпанов;
- Б) Н.Я. Гротт;
- В) М.В. Дробиш;
- Г) Г.И. Россолимо.

5. Первое в России учебное пособие, в котором изложены основы элементарных методов статистической обработки данных эксперимента, написал:

- А) Г.И. Челпанов;
- Б) Н.Я. Гротт;
- В) М.В. Дробиш;
- Г) Г.И. Россолимо.

6. Первые дискриптивные модели психических процессов разработал:

- А) Г.И. Челпанов;
- Б) Н.Я. Гротт;
- В) М.В. Дробиш;
- Г) Г.И. Россолимо.

7. Общую методологическую схему применения математических методов в психологическом исследовании предложил:

- А) Г.И. Челпанов;
- Б) Н.Я. Гротт;
- В) Г.В. Суходольский;
- Г) Г.И. Россолимо.

8. Исключить лишний элемент в суждении: «К функциям, которые выполняют модели на эмпирическом уровне, относятся...»:

- А) измерительная функция;
- Б) описательная функция;
- В) прогнозирующая функция;
- Г) реконструирующая функция.

9. Исключить лишний элемент в суждении: «К функциям, которые выполняют модели на теоретическом уровне, относятся...»:

- А) измерительная функция;
- Б) описательная функция;
- В) прогнозирующая функция;
- Г) реконструирующая функция.

10. Исключить лишний элемент в суждении: «По способу реализации выделяют следующие виды моделей...»:

- А) знаковые модели;
- Б) вещественные модели;
- В) образные модели;
- Г) функциональные модели.

11. Исключить лишний элемент в суждении: «По характеру воспроизводимых сторон оригинала выделяют следующие виды моделей...»:

- А) субстанциальные модели;
- Б) структурные модели;
- В) образные модели;
- Г) функциональные модели.

12. Искусственное конструирование психики и ее различных проявлений – это:

- А) психологическое моделирование;
- Б) моделирование психики;
- В) компьютерное моделирование;
- Г) математическое моделирование.

13. Искусственное создание специальных условий для проявления психики животных, людей, социальных групп – это:

- А) психологическое моделирование;
- Б) моделирование психики;
- В) компьютерное моделирование;
- Г) математическое моделирование.

14. Действующие модели психики являются основным средством моделирования:

- А) психологических механизмов;
- Б) физиологических механизмов;
- В) психогенных ситуаций;
- Г) учебных ситуаций.

15. Модели-описания психики являются основным средством моделирования:

- А) психологических механизмов;
- Б) физиологических механизмов;
- В) психогенных ситуаций;
- Г) учебных ситуаций.

16. Группа средств компьютерной обработки данных, которая позволяет решать задачи из конкретной области науки и требует работы с файлами – это:

- А) универсальные статистические пакеты;
- Б) математические пакеты;
- В) табличные процессоры;
- Г) базы данных.

17. Документ, содержащий подробное описание методики, хода исследования, результатов и выводов, полученных в ходе исследования – это:

- А) курсовая работа;
- Б) дипломная работа;
- В) научно-исследовательская работа;
- Г) диссертация.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Понятие о математической статистике и ее методах.
2. Переменные в психологии и их виды.
3. Измерительные шкалы и их виды.
4. Выборочная совокупность и правила ее формирования.
5. Распределение частот и табулирование данных.
6. Графическое представление эмпирических данных.
7. Меры центральной тенденции и их характеристика.
8. Меры изменчивости и их характеристика.
9. Распределение признака и его виды.
10. События. Виды событий.
11. Алгебра событий.
12. Вероятность. Классическое и статистическое определения вероятности.
13. Комбинаторика и вероятность: перестановки, размещения, сочетания.
14. Алгебра вероятностей: теоремы сложения вероятностей.
15. Теоремы умножения вероятностей. Формула полной вероятности.
16. Формулы Байеса.
17. Понятие о распределении признака. Нормальное распределение.
18. Свойства нормального распределения.
19. Стандартное нормальное распределение. Правило 3σ .
20. Применение нормального распределения: стандартизация и нормализация данных.
21. Проверка нормальности распределения: различные методы проверки.
22. Причины отклонения распределения от нормального.
23. Понятие о гипотезе. Теоретические и статистические гипотезы.
24. Статистические критерии: их структура и виды.
25. Понятие о степени свободы и уровне значимости. Общая схема проверки статистической гипотезы.
26. Оценки параметров генеральной совокупности. Точечное и интервальное оценивание.
27. Понятие о корреляции. Корреляционная связь и корреляционная зависимость.
28. Классификация корреляционных связей. Наглядное представление корреляции.
29. Меры связи для качественных данных: коэффициент ранговой корреляции Спирмена.
30. Меры связи для количественных данных: коэффициент корреляции Пирсона и его частные случаи.
31. Алгоритм выбора необходимого коэффициента корреляции.
32. Понятие о регрессионном анализе. Линейный регрессионный анализ.
33. Уравнение регрессии.
34. Коэффициент детерминации и его свойства.

35. Нелинейная регрессия. Множественная линейная регрессия.
36. Классификация задач психологического исследования и методов их решения.
37. Обоснование задачи сопоставления.
38. Критерии различия в уровне исследуемого признака: t -критерий Стьюдента для независимых выборок.
39. Критерии различия в уровне исследуемого признака. Q -критерий Розенбаума.
40. Критерии различия в уровне исследуемого признака. U -критерий Манна-Уитни.
41. Критерии различия в уровне исследуемого признака. H -критерий Крускала-Уоллиса.
42. Критерии различия в уровне исследуемого признака. S -критерий тенденций Джонкира.
43. Алгоритм принятия решения о выборе критерия для сопоставлений.
44. Обоснование задачи исследования изменений.
45. Классификация сдвигов и критериев оценки их статистической достоверности.
46. Критерии оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака: t -критерий Стьюдента для зависимых выборок.
47. Критерии оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака, G -критерий знаков.
48. Критерии оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака. T -критерий Вилкоксона.
49. Критерии оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака. χ^2 -критерий Фридмана.
50. Критерии оценки достоверности сдвига в значениях исследуемого признака. L -критерий тенденций Пейджа.
51. Алгоритм принятия решения о выборке критерия оценки изменений.
52. Обоснование задачи сравнения распределений признака.
53. Критерии различия в распределении признака. χ^2 -критерий Пирсона.
54. Критерии различия в распределении признака, λ -критерий Колмогорова-Смирнова.
55. Алгоритм выбора критерия для сравнения распределений.
56. Многофункциональные критерии как эффективные заменители традиционных критериев.
57. Критерий ϕ^* -угловое преобразование Фишера.
58. Биномиальный z -критерий.
59. Понятие о дисперсионном анализе.
60. Подготовка данных к дисперсионному анализу.
61. Однофакторный дисперсионный анализ для независимых выборок.
62. Однофакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок.
63. Двухфакторный дисперсионный анализ для независимых выборок.

64. Двухфакторный дисперсионный анализ для зависимых выборок.
65. Многомерные статистические методы как средство моделирования психических явлений.
66. Классификация методов многомерного анализа.
67. Факторный анализ.
68. Кластерный анализ.
69. Понятие о множественном регрессионном анализе.
70. Понятие о логистическом регрессионном анализе.
71. Понятие о дискриминантном анализе.
72. Понятие о многомерном корреляционном анализе.
73. Понятие о многомерном шкалировании.
74. История применения математических методов в психологии.
75. Методологические проблемы использования математики в психологии.
76. Проблема математического моделирования психики. Виды и функции моделей.
77. Основные направления моделирования в психологии.
78. Математическое моделирование психических явлений. Нетрадиционные методы моделирования.
79. Компьютерные методы статистической обработки результатов психологического исследования.
80. Нормативы представления результатов анализа данных в научной психологии.

Практическое задание.

1. Решение задач по теме «Измерительные шкалы».
2. Решение задач по теме «Меры центральной тенденции».
3. Решение задач по теме «Меры изменчивости».
4. Решение задач по теме «Алгебра событий».
5. Решение задач по теме «Алгебра вероятностей».
6. Решение задач по теме «Статистические гипотезы».
7. Решение задач на выявление различий в уровне исследуемого признака.
8. Решение задач на оценку сдвига значений исследуемого признака.
9. Решение задач на выявление различий в распределении признака.
10. Решение задач на выявление степени согласованности изменений.
11. Решение задач по теме «Многофункциональные критерии».
12. Решение задач по теме «Однофакторный дисперсионный анализ».
13. Решение задач по теме «Многофакторный дисперсионный анализ».
14. Решение задач по теме «Регрессионный анализ».
15. Решение задач по теме «Факторный анализ».
16. Решение задач по теме «Кластерный анализ».

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Практическое занятие 3

6. $M_o = 11$, $M_e = 11$, $\bar{x} = 11,3$; **7.** $M_o = 12$, $M_e = 11$, $\bar{x} = 10,1$; **10.** $\bar{x} = 746,7$; $D = 530880,95$; $\sigma = 728,62$; **12.** $R = 55$, $\bar{x} = 146,55$; $D = 338,24$, $\sigma = 18,39$; $v = 12,6\%$; **13.** $R = 12$; $\bar{x} = 10,33$; $D = 7,4$; $\sigma = 2,72$; $v = 26,3\%$; **14.** $R = 9$; $\bar{x} = 10,97$; $D = 5,41$; $\sigma = 2,32$; $v = 21,2\%$; **17.** $A = 0,23$; $E = -0,95$; **19.** $A = -0,06$; $E = -0,90$; **20.** $\bar{x} = 10,13$; $R = 8$; $D = 4,74$; $\sigma = 2,18$; $v = 21,5\%$; $A = -0,16$; $E = -1,09$.

Практическое занятие 4

29. $2/3$, $1/3$; **41.** 120; **42.** 40320; **43.** 720; **44.** 5040; **45.** 120; **46.** 53130; **47.** 20; **48.** 120; 30; 60; 210; **49.** 10 000; **50.** 256; **51.** 8008; **52.** 1001; **53.** 2520; **54.** 150; **55.** 63000; **56.** $1/120$; **57.** $1/10$; **58.** $1/2$; **59.** $24/125$; **60.** $5/9$; **61.** $18/35$; **62.** $5/9$; **63.** $1/2$; **64.** $1/2$; **65.** 0,7; **66.** $9/10$; **67.** 0,97; **68.** 0,48 и 0,52; **69.** $1/4$; **70.** $51/90$; **71.** $1/3$; **72.** $24/91$; **73.** 0,2625; **74.** 0,0715; **75.** 0,77495; **76.** 0,9935; **77.** 0,87; **78.** $17/21$; **79.** 0,589; **80.** 0,2373; **81.** 0,281; 0,156; 0,563; **82.** $18/27$; 0; $6/27$; $3/27$; **95.** $1/2$; **96.** $1/3$; **97.** 0; **98.** 0,25.

Практическое занятие 5

3. а) 0,8882; б) 0,8944; в) 0,1056; **4.** а) 0,4236; б) 0,5; в) 0,5; **6.** 0,1359; **10.** а) 0,0228; б) 0,0228; **11.** 0,4082.

Практическое занятие 7

1. 5,76; **2.** 4; **3.** 5,1; **4.** 100; 34; 42,5; **5.** 10; 2,5; $10/3$; **7.** (7,63; 12,77) и (14,23; 19,37); **8.** (992,16; 1007,84); **10.** 0, 392; **11.** (34,66; 50,94); **13.** (-0,04; 0,88); **15.** (0; 14,28); (7,98; 20,02); **16.** 179; **17.** 385; **20.** 259.

Практическое занятие 8

10. -0,657, $p \leq 0,05$; **11.** 0,64; **12.** 0,94; **13.** 0,23; **14.** 0,92; **15.** 0,74; **16.** 0,82; **18.** -0,21; 0,64; -0,3; **20.** 0,694, $p \leq 0,05$; **21.** 0,517, $p \leq 0,05$; **23.** -0,04; **24.** 0,21; **29.** 0,507; **30.** 0, 852; **31.** -0, 216.

Практическое занятие 9

3. $r_{xy} = 0,69$; $x = 136,9 + 0,5y$; **4.** а) $r_{xy} = 0,91$; в) $x = -4,57 + 1,09y$; $y = 36,31 - 0,75x$; **5.** а) $r_{xy} = -0,95$; в) $x = 4,49 - 0,05y$; $y = 96,53 - 19,67x$; **6.** а) $r_{xy} = -0,95$; в) $x = 673,2 - 47,79y$; $y = 13,197 - 0,02x$; **7.** а) $r_{xy} = 0,97$; в) $x = -6,29 + 1,66y$; $y = 5,81 + 0,56x$; **8.** а) $r_{xy} = 0,98$; в) $x = 0,53 + 0,46y$; $y = -0,23 + 2,08x$; **9.** а) $r_{xy} = 0,86$; в) $x = 1,96 + 0,008y$; $y = 126,49 + 96,79x$; **10.** а) $r_{xy} = 0,97$; в) $x = 2,77 + 0,03y$; $y = -70,92 + 28,46x$; **11.** а) $r_{xy} = -0,41$; в) $x = 65,87 - 0,04y$; $y = 411,05 - 3,99x$; **12.** а) $r_{xy} = 0,96$; в) $x = -0,83 + 0,76y$; $y = 1,54 + 1,21x$.

Практическое занятие 10

1. $Q_{эмп} = 11, H_1$; 2. $U_{эмп} = 60, H_0$; 3. $Q_{эмп} = 10, H_1$; 4. $U_{эмп} = 11, H_1$; 5. $U_{эмп} = 44,5, H_1$; 6. $t_{эмп} = 0,6, H_0$; 7. $U_{эмп} = 27,5, H_0$; 8. $t_{эмп} = 1,74, H_0$; 9. $Q = 3, H_0$; 10. $U_{эмп} = 83,5, H_0$; 11. $t_{эмп} = 1,14, H_0$; 12. $U_{эмп} = 133, H_1$; 13. $t_{эмп} = 1,92, H_0$; 14. $F_{эмп} = 3,68, H_0$; 15. $t_{эмп} = 1,28, H_0$; $F_{эмп} = 1,76, H_0$; 16. $U_{эмп} = 24, H_1$; 17. $U_{эмп} = 99,5, H_0$; 18. $t_{эмп} = 0,53, H_0$; 19. $H_{эмп} = 25,46, H_1$; 20. $H_{эмп} = 5,58, H_0$; 21. $H_{эмп} = 9,28, H_1$; 22. $H_{эмп} = 2,48, H_0$; 23. $S_{эмп} = 92, H_1$; 24. $H_{эмп} = 6,15, H_0$; 25. $S_{эмп} = 6,15, H_1$.

Практическое занятие 11

1. $G_{эмп} = 3, H_0$; 2. $G_{эмп} = 2, H_1$; 3. $T_{эмп} = 10,5, H_1$; 4. $t_{эмп} = 3,43, H_1$; 5. $T_{эмп} = 13, H_1$; 6. $\bar{x}_1 = 154,4; \bar{x}_2 = 160,1; t_{эмп} = 3,45, H_1$; 7. $T_{эмп} = 17,5, H_0$; 8. $G_{эмп} = 4, H_0$; 9. $T_{эмп} = 23, H_1$; 10. $G_{эмп} = 3, H_1$; 11. $T_{эмп} = 17,5, H_1$; 12. $t_{эмп} = 2,64, H_1$; 13. Эмпатия: $G_{эмп} = 4, H_0$; коммуникабельность: $G_{эмп} = 4, H_0$; 14. Эмпатия: $T_{эмп} = 22, H_0$; коммуникабельность: $T_{эмп} = 20, H_0$; 15. $G_{эмп} = 0, H_1$; 16. $t_{эмп} = 2,39, H_1$; 17. а) $t_{эмп} = 1,64, H_0$; б) $G_{эмп} = 2, H_0$; 18. а) $t_{эмп} = 5,09, H_1$; б) $G_{эмп} = 2, H_1$; 19. а) $t_{эмп} = 0,39, H_0$; б) $G_{эмп} = 5, H_0$; 20. $\chi^2_{эмп} = 7,83, H_1$; 21. $L_{эмп} = 327,5, H_1$; 22. $\chi^2_{эмп} = 7,4, H_0$; 23. $\chi^2_{эмп} = 8,4, H_1$; 24. Тенденция: анаграмма 1 – анаграмма 3 – анаграмма 2. $L_{эмп} = 69, H_1$; 25. $\chi^2_{эмп} = 5,75, H_0$; 26. $L_{эмп} = 311,5, H_1$.

Практическое занятие 12

1. $\chi^2_{эмп} = 3,68, H_0$; 2. $\chi^2_{эмп} = 4,86, H_0$; 3. $\chi^2_{эмп} = 3,65, H_0$; 4. $\chi^2_{эмп} = 0,71, H_0$; 5. $\chi^2_{эмп} = 11,6, H_1$; 6. $\chi^2_{эмп} = 20,9, H_1$; 7. $\chi^2_{эмп} = 0,17, H_0$; 8. $\chi^2_{эмп} = 1,86, H_0$; 9. а) $\chi^2_{эмп} = 0,64, H_0$; б) $\chi^2_{эмп} = 3,86, H_1$; 10. $\chi^2_{эмп} = 1,62, H_0$; 11. $\chi^2_{эмп} = 54,17, H_1$; 12. $\lambda = 1,66, H_1$; 13. $\lambda = 1,36, H_1$; 14. $\chi^2_{эмп} = 13,33, H_1$; 15. $\lambda_{эмп} = 0,15, H_1$; 16. $\chi^2_{эмп} = 11,84, H_1$; 17. $\chi^2_{эмп} = 6,45, H_0$; 18. $\lambda_{эмп} = 1,1, H_0$; 19. $\chi^2_{эмп} = 19,12, H_1$; 20. $\lambda_{эмп} = 1,75, H_1$; 21. $\chi^2_{эмп} = 26,5, H_1$.

Практическое занятие 13

1. $\varphi^*_{эмп} = 1,86, H_1$; 2. $\varphi^*_{эмп} = 2,32, H_1$; 3. $\varphi^*_{эмп} = 3,78, H_1$; 4. $\varphi^*_{эмп} = 0,91, H_0$; 5. Ассоциация настроения $\varphi^*_{эмп} = 4,27, H_1$; ассоциация прошлого $\varphi^*_{эмп} = 0,96, H_0$; 6. $\varphi^*_{эмп} = 0,42, H_0$; 7. $\varphi^*_{эмп} = 1,84, H_1$; 8. $\varphi^*_{эмп} = 2,32, H_1$; 9. $\varphi^*_{эмп} = 1,06, H_0$; 10. $\varphi^*_{эмп} = 1,76, H_1$; 11. $\varphi^*_{эмп} = 4,99, H_1$; 12. $Z_{эмп} = 1,61, H_0$; 13. $Z_{эмп} = 3,63, H_1$; 14. $Z_{эмп} = 2,62, H_1$; 15. $Z_{эмп} = 0,48, H_0$; 16. $Z_{эмп} = 2,60, H_1$ ($\chi^2_{эмп} = 13,5, H_1$); 17. $Z_{эмп} = 0,9, H_0$ ($\chi^2_{эмп} = 1,62, H_0$); 18. $Z_{эмп} = 1,25, H_0$; 19. $Z_{эмп} = 1,02, H_0$; 20. $Z_{эмп} = 1,83, H_1$ ($t_{эмп} = 5,09, H_1$; $G_{эмп} = 2, H_1$).

Практическое занятие 14

1. $F = 4,8, H_0$; 2. а) $F = 7,82, H_1$; б) $H_{эмп} = 10,55, H_1$; 3. а) $F = 6,05, H_1$; б) $H_{эмп} = 7,94, H_1$; 4. $F = 3,17, H_0$; 5. $F = 8,0, H_1$; 6. $F = 1,7, H_0$; 7. $F = 0,72, H_0$; 8. $F = 3,38, H_1$; 9. Для экстра-интроверсии $F = 0,098, H_0$; для нейротизма $F = 0,728, H_0$; 10. $F = 3,38, H_0$; 11. $F = 2,90, H_0$; 12. $F = 5,64, H_1$; 13. $F_A = 10,8, H_{1A}$; $F_{II} = 0,5, H_{0II}$; $\chi^2_{эмп} = 9,1, H_1$; 14. $F_A = 8,57, H_{1A}$; $F_{II} = 5,71, H_{1II}$; $\chi^2_{эмп} = 5,7, H_0$; 15. $F_A = 2,83, H_{0A}$; $F_B = 12,65, H_{1B}$; $F_{AB} = 0,2, H_{0AB}$; 16. $F_A = 26,88, H_{1A}$; $F_B = 2,61, H_{0B}$; $F_{AB} = 1,1, H_{0AB}$.

17. $F_A = 3,46$; H_{0A} ; $F_B = 1,15$; H_{0B} ; $F_{AB} = 10,39$; H_{1AB} ; **18.** $F_A = 0,25$; H_{0A} ; $F_B = 1,43$; H_{0B} ; $F_{AB} = 18,57$; H_{1AB} ; **19.** $F_A = 13,61$; H_{1A} ; $F_B = 11,61$; H_{1B} ; $F_{AB} = 19,04$; H_{1AB} ; **20.** $F_A = 2,04$; H_{0A} ; $F_B = 2,72$; H_{0B} ; $F_{AB} = 8,15$; H_{1AB} .

Практическое занятие 15

8. а) увеличится на 1,6 балла; б) увеличится на 0,43 балла; **9.** а) $X \approx 38$; б) $X \approx 48,5$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции Лапласа

(Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1999)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Стандартные нормальные вероятности

(Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. СПб., 2008)

В таблице указаны значения площади под кривой нормального распределения, находящиеся справа от Z . В крайнем левом столбце даны различные z -значения с точностью до одного десятичного знака. Сотые доли представлены в верхней строке таблицы.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4404	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,2	0,0007									
3,3	0,0005									
3,4	0,0003									
3,5	0,00023									
3,6	0,00016									
3,7	0,00011									
3,8	0,00007									
3,9	0,00005									
4,0	0,00003									

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

(Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1999)

$\begin{array}{c} \gamma \\ n \end{array}$	0,95	0,99	0,999	$\begin{array}{c} \gamma \\ n \end{array}$	0,95	0,99	0,099
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,10	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

(Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1999)

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,099
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,50
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,101	0,220	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5

Критические значения коэффициента корреляции рангов Спирмена r_s

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Связь достоверна, если $r_{s\text{эмн}} \geq r_{s\ 0,05}$, и тем более достоверна, если $r_{s\text{эмн}} \geq r_{s\ 0,01}$.

n	p		n	p		n	p	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0,94	-	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	-	18	0,47	0,60	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,54	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,58	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	26	0,49	0,51	37	0,33	0,43
14	0,54	0,68	26	0,39	0,50	38	0,32	0,41
15	0,52	0,66	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,50	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,40

Приложение 6

Критические значения коэффициента линейной корреляции Пирсона r_{xy}

(Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов. М., 2002)

Связь достоверна, если $r_{xy \text{ эм}} \geq r_{xy 0,05}$, и тем более достоверна, если $r_{xy \text{ эм}} \geq r_{xy 0,01}$.

$n - 2$	Уровни значимости		$n - 2$	Уровни значимости	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	0,75	0,87	27	0,37	0,47
6	0,71	0,83	28	0,36	0,46
7	0,67	0,80	29	0,36	0,46
8	0,63	0,77	30	0,35	0,45
9	0,60	0,74	35	0,33	0,42
10	0,58	0,71	40	0,30	0,39
11	0,55	0,68	45	0,29	0,37
12	0,53	0,66	50	0,27	0,35
13	0,51	0,64	60	0,25	0,33
14	0,50	0,62	70	0,23	0,30
15	0,48	0,61	80	0,22	0,28
16	0,47	0,59	90	0,21	0,27
17	0,46	0,58	100	0,20	0,25
18	0,44	0,56	125	0,17	0,23
19	0,43	0,55	150	0,16	0,21
20	0,42	0,54	200	0,14	0,18
21	0,41	0,53	300	0,11	0,15
22	0,40	0,52	400	0,10	0,13
23	0,40	0,51	500	0,09	0,12
24	0,39	0,50	700	0,07	0,10
25	0,38	0,49	900	0,06	0,09
26	0,37	0,48	1000	0,06	0,09
P	0,05	0,01	-	0,05	0,01

Приложение 7

Критические значения t -критерия Стьюдента (Ермолаев О.Ю. Математическая статистика для психологов. М., 2002)

Различия между двумя выборками можно считать достоверными, если $t_{эм} \geq t_{0,05}$,
и тем более достоверными, если $t_{эм} \geq t_{0,01}$.

Число степеней свободы	p			Число степеней свободы	p		
	0,05	0,01	0,001		0,05	0,01	0,001
1	12,71	63,66	64,60	18	2,10	2,88	3,92
2	4,30	9,92	31,60	19	2,09	2,86	3,88
3	3,18	5,84	12,92	20	2,09	2,85	3,85
4	2,78	4,60	8,61	21	2,08	2,83	3,82
5	2,57	4,03	6,87	22	2,07	2,02	3,79
6	2,45	3,71	5,96	23	2,07	2,81	3,77
7	2,37	3,50	5,41	24	2,06	2,80	3,75
8	2,31	3,36	5,04	25	2,06	2,79	3,73
9	2,26	3,25	4,78	26	2,06	2,78	3,71
10	2,23	3,17	4,59	27	2,05	2,77	3,69
11	2,20	3,11	4,44	28	2,05	2,76	3,67
12	2,18	3,05	4,32	29	2,05	2,76	3,66
13	2,16	3,01	4,22	30	2,04	2,75	3,65
14	2,14	2,98	4,14	40	2,02	2,70	3,55
15	2,13	2,95	4,07	60	2,00	2,66	3,46
16	2,12	2,92	4,02	120	1,98,	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,97	∞	1,96	2,58	3,29
p	0,05	0,01	0,001	-	0,05	0,01	0,001

Приложение 8

Данные для обработки

(Кутейников А.Н. Математические методы в психологии. СПб., 2008)

Учащиеся	Пол	Класс	Профиль вуза	Осведомленность	Скрытые фигуры	Пропущенные слова	Арифметика	Понятливость	Исключение изображений	Аналогии	Числовые ряды	Умозаключения	Геометрическое сложение	Заучивание слов	Средний IQ	Экстраверсия-интроверсия	Нейротизм	Средняя отметка
1	ж	гум	0	12	9	11	8	8	11	13	8	12	10	11	10,3	15	7	3,93
2	ж	гум	1	10	12	12	11	10	12	9	12	8	11	11	10,7	13	17	4,27
3	м	мат	1	11	8	9	11	11	12	9	11	8	11	8	10	10	19	3,87
4	ж	гум	0	14	12	14	13	13	9	9	9	12	11	12	11,6	13	11	4,57
5	ж	гум	0	12	12	9	10	9	12	5	10	3	11	9	9,27	16	8	4,14
6	ж	гум	1	10	12	12	8	13	12	9	9	11	8	11	10,5	11	5	4,93
7	м	мат	0	9	2	6	10	7	4	8	10	7	5	9	7	5	8	3,71
8	ж	гум	0	14	5	13	11	13	13	13	9	13	9	14	11,6	13	4	4,14
9	ж	гум	0	14	11	11	16	8	12	13	8	13	9	9	10,6	16	10	3,6
10	ж	гум	0	15	14	11	11	12	12	14	11	12	11	16	12,6	13	11	4,5
11	ж	гум	0	13	7	3	9	8	7	7	6	8	3	9	7,18	11	11	3,71
12	ж	гум	1	9	8	7	12	14	12	7	6	8	13	11	9,73	17	12	3,87
13	ж	гум	0	16	14	15	11	11	11	10	10	12	12	12	12,2	14	10	4,43
14	ж	гум	0	14	12	11	10	10	12	10	11	13	14	12	11,7	20	15	4,38
15	м	гум	1	11	6	9	9	9	7	14	8	11	6	11	9,18	15	9	4,57
16	ж	гум	0	7	7	15	11	9	9	10	8	12	8	10	9,64	19	6	3,43
17	м	гум	1	13	12	15	9	11	7	8	12	15	11	11	11,3	14	16	3,75
18	ж	гум	1	8	9	9	8	12	12	9	9	15	13	9	10,4	20	12	4,2
19	м	мат	1	12	11	10	13	11	8	10	10	10	14	11	10,9	10	15	4,23
20	м	мат	1	14	9	11	13	12	13	13	14	13	11	11	12,2	10	15	4,07
21	ж	гум	о	11	12	12	12	11	12	14	9	12	10	11	11,5	13	9	4,6
22	ж	гум	0	11	16	10	7	7	8	10	5	12	9	9	8,82	14	11	3,93
23	м	гум	0	1	11	11	12	8	14	10	10	14	11	10	10,8	12	12	3,87
24	ж	мат	1	10	12	10	14	12	9	13	12	12	12	10	11,3	11	21	4,53
25	ж	гум	0	9	12	8	13	12	6	14	12	18	12	6	11,4	14	9	4,27
26	м	мат	1	10	10	9	11	10	12	13	10	12	13	7	10,5	8	22	3,67
27	м	мат	1	9	14	10	16	8	7	10	12	11	9	8	9,36	5	15	3,8
28	ж	гум	0	10	5	8	7	6	13	15	10	14	12	9	10,3	15	14	4,07
29	м	мат	1	11	7	12	13	7	7	16	11	12	16	9	12,3	11	14	4,36
30	м	мат	1	9	12	7	10	12	7	15	10	14	12	6	10	12	15	3,71

Профиль вуза: 0 – выбор учеником гуманитарного профиля;

1 – выбор учеником математического или естественно научного профиля.

Критические значения Q -критерия Розенбаума

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Различия между двумя выборками можно считать достоверными, если $Q_{эм} \geq Q_{0,05}$,
и тем более достоверными, если $Q_{эм} \geq Q_{0,01}$.

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$p = 0,05$																
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	8	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7		7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7
$p = 0,01$																
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9					
22	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9

Критические значения U -критерия Манна-Уитни

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Различия между двумя выборками можно считать достоверными, если $U_{эмп} \leq U_{0,05}$,
и тем более достоверными, если $U_{эмп} \leq U_{0,01}$.

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2	$p = 0,05$																		
3	-	0																	
4	-	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	11													
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
n_2	$p = 0,01$																		
5	-	-	0	1															
6	-	-	1	2	3														
7	-	0	1	3	4	6													
8	-	0	2	4	6	7	9												
9	-	1	3	5	7	9	11	14											
10	-	1	3	6	8	11	13	16	19										
11	-	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	-	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

n_1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
n_2	$p = 0,05$																	
21	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146	154
22	20	28	36	44	52	60	69	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154	162
23	21	29	37	46	55	63	72	81	90	99	107	116	125	134	143	152	161	170
24	22	31	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179
25	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177	187
26	24	33	43	53	62	72	82	93	103	113	123	133	143	154	164	174	185	195
27	25	35	45	55	65	75	86	96	107	118	128	139	150	160	171	182	193	203
28	26	36	47	57	68	79	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200	212
29	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	139	150	162	173	185	196	208	220
30	28	39	50	62	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
31	29	41	52	64	76	88	100	112	124	137	149	161	174	186	199	211	224	236
32	30	42	54	66	78	91	103	116	129	141	154	167	180	193	206	219	232	245
33	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	173	186	199	213	226	239	253
34	32	45	58	71	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247	261
35	33	46	59	73	86	100	114	128	142	156	170	184	198	212	226	241	255	269
36	35	48	61	75	89	103	117	132	146	160	175	189	204	219	233	248	263	278
37	36	49	63	77	92	106	121	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271	286
38	37	51	65	79	94	109	124	139	155	170	185	201	216	232	247	263	278	294
39	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286	302
40	39	53	69	84	100	115	131	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294	311
n_2	$p = 0,01$																	
21	10	16	22	29	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	113	120	127
22	10	17	23	30	37	45	52	59	66	74	81	89	96	104	111	119	127	134
23	11	18	25	32	39	47	55	62	70	78	86	94	102	109	117	125	133	141
24	12	19	26	34	42	49	57	66	74	82	90	98	107	115	123	132	140	149
25	12	20	27	35	44	52	60	69	77	86	95	103	112	121	130	138	147	156
26	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	99	108	117	126	136	145	154	163
27	14	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	132	142	151	161	171
28	14	23	32	41	50	59	69	78	88	98	108	118	128	138	148	158	168	178
29	15	24	33	42	52	62	72	82	92	102	112	123	133	143	154	164	175	185
30	15	25	34	44	54	64	75	85	95	106	117	127	138	149	160	171	182	192
31	16	26	36	46	56	67	77	88	99	110	121	132	143	155	166	177	188	200
32	17	27	37	47	58	69	80	91	103	114	126	137	149	160	172	184	195	207
33	17	28	38	49	60	72	83	95	106	118	130	142	154	166	178	190	202	214
34	18	29	40	51	62	74	86	98	110	122	134	147	159	172	184	197	209	222
35	19	30	41	53	64	77	89	101	114	126	139	152	164	177	190	203	216	229
36	19	31	42	54	67	79	92	104	117	130	143	156	170	183	196	210	223	236
37	20	32	44	56	69	81	95	108	121	134	148	161	175	189	202	216	230	244
38	21	33	45	58	71	84	97	111	125	138	152	166	180	194	208	223	237	251
39	21	34	46	59	73	86	100	114	128	142	157	171	185	200	214	229	244	258
40	22	35	48	61	75	89	103	117	132	146	161	176	191	206	221	236	251	266

Продолжение Приложения 10

n_1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n_2	$p = 0,05$																		
21																			
22	171																		
23	180	189																	
24	188	198	207																
25	197	207	217	227															
26	206	216	226	237	247														
27	214	225	236	247	258	268													
28	223	234	245	257	268	279	291												
29	232	243	255	267	278	290	302	314											
30	240	252	265	277	289	301	313	326	338										
31	249	261	274	287	299	312	325	337	350	363									
32	258	271	284	297	310	323	336	349	362	375	389								
33	266	280	293	307	320	334	347	361	374	388	402	415							
34	275	289	303	317	331	345	359	373	387	401	415	429	443						
35	284	298	312	327	341	356	370	385	399	413	428	442	457	471					
36	292	307	322	337	352	367	381	396	411	426	441	456	471	486	501				
37	301	316	332	347	362	378	393	408	424	439	454	470	485	501	516	531			
38	310	325	341	357	373	388	404	420	436	452	467	483	499	515	531	547	563		
39	318	335	351	367	383	399	416	432	448	464	481	497	513	530	546	562	579	595	
40	327	344	360	377	394	410	427	444	460	477	494	511	527	544	561	578	594	611	628
n_2	$p = 0,01$																		
21																			
22	142																		
23	150	158																	
24	154	166	174																
25	165	174	183	192															
26	173	182	191	201	210														
27	180	190	200	209	219	229													
28	188	198	208	218	229	239	249												
29	196	206	217	227	238	249	259	270											
30	203	214	225	236	247	258	270	281	292										
31	211	223	234	245	257	268	280	291	303	314									
32	219	231	242	254	266	278	290	302	314	326	338								
33	227	239	251	263	276	288	300	313	325	337	350	362							
34	234	247	260	272	285	298	311	323	336	349	362	375	387						
35	242	255	268	281	294	308	321	334	347	360	374	387	400	413					
36	250	263	277	290	304	318	331	345	358	372	386	399	413	427	440				
37	258	271	285	299	313	327	341	355	370	384	398	412	426	440	454	468			
38	265	280	294	308	323	337	352	366	381	395	410	424	439	453	468	482	497		
39	273	288	303	317	332	347	362	377	392	407	422	437	452	467	482	497	512	527	
40	281	296	311	326	342	357	372	388	403	418	434	449	465	480	495	511	526	542	557

n_1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n_2	$p = 0,05$																		
41	336	353	370	387	404	421	438	456	473	490	507	524	541	559	576	593	610	628	645
42	345	362	380	397	415	432	450	467	485	503	520	538	556	573	591	609	626	644	662
43	353	371	389	407	425	443	461	479	497	515	533	552	570	588	606	624	642	660	679
44	362	380	399	417	436	454	473	491	510	528	547	565	584	602	621	640	658	677	695
45	371	390	408	427	446	465	484	503	522	541	560	579	598	617	636	655	674	693	712
46	380	399	418	437	457	476	495	515	534	554	573	593	612	631	651	670	690	709	729
47	388	408	428	447	467	487	507	527	547	566	586	606	626	646	666	686	706	726	746
48	397	417	437	458	478	498	518	539	559	579	600	620	640	661	681	701	722	742	763
49	406	426	447	468	488	509	530	550	571	592	613	634	654	675	696	717	738	759	780
50	414	435	457	478	499	520	541	562	583	605	626	647	669	690	711	732	754	775	796
51	423	445	466	488	509	531	553	574	596	618	639	661	683	704	726	748	770	791	813
52	432	454	476	498	520	542	564	586	608	630	652	675	697	719	741	763	786	808	830
53	441	463	485	508	530	553	575	598	620	643	666	688	711	734	756	779	802	824	847
54	449	472	495	518	541	564	587	610	633	656	679	702	725	748	771	794	818	841	864
55	458	481	505	528	551	575	598	622	645	669	692	716	739	763	786	810	834	857	881
56	467	491	514	538	562	586	610	634	657	681	705	729	753	777	801	825	850	874	898
57	476	500	524	548	572	597	621	645	670	694	719	743	768	792	816	841	865	890	915
58	484	509	534	558	583	608	633	657	682	707	732	757	782	807	832	856	881	906	931
59	493	518	543	568	594	619	644	669	694	720	745	770	796	821	847	872	897	923	948
60	502	527	553	578	604	630	655	681	707	733	758	784	810	836	862	888	913	939	965
n_2	$p = 0,01$																		
41	289	304	320	336	351	367	383	398	414	430	446	462	477	493	509	525	541	557	573
42	296	312	328	345	361	377	393	409	425	442	458	474	490	507	523	539	556	572	588
43	304	321	337	354	370	387	403	420	437	453	470	487	503	520	537	553	570	587	604
44	312	329	346	363	380	397	414	431	448	465	482	499	516	533	550	568	585	602	619
45	320	337	354	372	389	407	424	441	459	476	494	511	529	547	564	582	599	617	635
46	328	345	363	381	399	416	434	452	470	488	506	524	542	560	578	596	614	632	650
47	335	353	372	390	408	426	445	463	481	500	518	536	555	573	592	610	629	647	666
48	343	362	380	399	418	436	455	474	492	511	530	549	568	587	606	625	643	662	681
49	351	370	389	408	427	446	465	484	504	523	542	561	581	600	619	639	658	678	697
50	359	378	398	417	437	456	476	495	515	535	554	574	594	613	633	653	673	693	713
51	366	386	406	426	446	466	486	506	526	546	566	587	607	627	647	667	688	708	728
52	374	395	415	435	456	476	496	517	537	558	578	599	620	640	661	682	702	723	744
53	382	403	423	444	465	486	507	528	549	570	591	612	633	654	675	696	717	738	759
54	390	411	432	453	475	496	517	538	560	581	603	624	646	667	689	710	732	753	775
55	398	419	441	462	484	506	527	549	571	593	615	637	659	680	702	724	746	768	790
56	405	427	449	471	494	516	538	560	582	605	627	649	671	694	716	738	761	784	806
57	413	436	458	481	503	526	548	571	593	616	639	662	684	707	730	753	776	799	822
58	421	444	467	490	513	536	559	582	605	628	651	674	697	721	744	767	790	814	837
59	429	452	475	499	522	545	569	592	616	640	663	687	710	734	758	781	805	829	853
60	437	460	484	508	532	555	579	603	627	651	675	699	723	747	772	796	820	844	868

Окончание Приложения 10

n_1	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
n_2	$p = 0,05$																			
41	662																			
42	679	697																		
43	697	715	733																	
44	714	733	751	770																
45	731	750	769	789	808															
46	749	768	788	807	827	846														
47	766	786	806	826	846	866	886													
48	783	804	824	845	865	886	906	927												
49	800	821	842	863	884	905	926	947	968											
50	818	839	861	882	903	925	946	968	989	1010										
51	835	857	879	901	922	944	966	988	1010	1032	1054									
52	852	875	897	919	942	964	986	1009	1031	1053	1076	1098								
53	870	893	915	938	961	934	1006	1029	1052	1075	1098	1120	1143							
54	887	910	934	957	980	1003	1026	1050	1073	1096	1119	1143	1166	1189	J					
55	901	928	952	975	999	1023	1046	1070	1094	1113	1141	1165	1189	1213	1236					
56	922	946	970	994	1018	1042	1067	1091	1115	1139	1163	1187	1212	1236	1260	1284				
57	939	964	988	1013	1037	1062	1087	1111	1136	1161	1185	1210	1235	1259	1284	1309	1333			
58	956	981	1007	1032	1057	1082	1107	1132	1157	1182	1207	1232	1257	1283	1308	1333	1358	1383		
59	974	999	1025	1050	1076	1101	1127	1152	1178	1204	1229	1255	1280	1306	1331	1357	1383	1408	1434	
60	991	1017	1043	1069	1095	1121	1147	1173	1199	1225	1251	1277	1303	1329	1355	1381	1407	1433	1460	1486
	$p = 0,01$																			
41	589																			
42	605	621																		
43	621	637	654																	
44	636	654	671	688																
45	652	670	688	706	723															
46	668	687	705	723	741	759														
47	684	701	722	740	759	777	796													
48	700	719	738	757	776	795	814	834												
49	716	736	755	775	794	814	833	853	872											
50	732	752	772	792	812	832	852	872	892	912										
51	748	769	789	809	830	850	870	891	911	932	952									
52	764	785	806	827	847	868	889	910	931	951	972	993								
53	780	801	823	844	865	886	908	929	950	971	993	1014	1035							
54	796	818	840	861	883	905	926	948	970	991	1013	1035	1057	1078						
55	812	834	857	879	901	923	945	967	989	1011	1034	1056	1078	1100	1172					
56	828	851	873	896	919	941	964	986	1009	1031	1054	1077	1099	1122	1145	1167				
57	844	867	890	913	936	959	982	1005	1028	1051	1074	1098	1121	1141	1167	1190	1213			
58	861	884	907	931	954	978	1001	1024	1048	1071	1095	1118	1142	1165	1189	1215	1256	1260		
59	877	900	924	948	972	996	1020	1044	1068	1091	1115	1139	1163	1187	1211	1235	1259	1283	1307	
60	893	917	941	965	990	1014	1038	1063	1087	1111	1136	1160	1185	1209	1234	1258	1282	1307	1331	1356

**Критические значения F -критерия Фишера, применяемые
для сравнения дисперсий**

(Кутейников А.Н. Математические методы в психологии. СПб., 2008)

Различия между двумя выборками можно считать достоверными, если $F_{эм} \geq F_{0,05}$.

Уровень значимости $p = 0,05$

$df_{эм}$	Число степеней свободы показателя $df_{число}$																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	35	40	45	50
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779	3,717	3,522	3,419	3,355	3,311	3,279	3,255	3,237	3,221
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588	3,526	3,330	3,226	3,162	3,118	3,086	3,061	3,042	3,027
12	6,554	5,096	4,474	4,12,1	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436	3,374	3,177	3,073	3,008	2,963	2,931	2,906	2,887	2,871
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312	3,250	3,053	2,948	2,882	2,837	2,805	2,780	2,760	2,744
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209	3,147	2,949	2,844	2,778	2,732	2,699	2,674	2,654	2,638
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123	3,060	2,862	2,756	2,689	2,644	2,610	2,585	2,565	2,549
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049	2,986	2,788	2,681	2,614	2,568	2,534	2,509	2,488	2,472
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985	2,922	2,723	2,616	2,548	2,502	2,468	2,442	2,422	2,405
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,100	3,005	2,929	2,866	2,667	2,559	2,491	2,445	2,410	2,384	2,364	2,347
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,880	2,817	2,617	2,509	2,441	2,394	2,359	2,333	2,312	2,295
20	5,871	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837	2,774	2,573	2,464	2,396	2,349	2,314	2,287	2,266	2,249
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,969	2,874	2,798	2,735	2,534	2,425	2,356	2,308	2,273	2,246	2,225	2,208
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763	2,700	2,498	2,389	2,320	2,272	2,237	2,210	2,188	2,171
23	5,750	4,349	3,750	3,408	3,183	3,023	2,902	2,808	2,731	2,668	2,466	2,357	2,287	2,239	2,204	2,176	2,155	2,137
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703	2,640	2,437	2,327	2,257	2,209	2,173	2,146	2,124	2,107
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677	2,613	2,411	2,300	2,230	2,182	2,146	2,118	2,096	2,079
26	5,659	4,265	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653	2,590	2,387	2,276	2,205	2,157	2,120	2,093	2,071	2,053
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,802	2,707	2,631	2,568	2,364	2,253	2,183	2,133	2,097	2,069	2,047	2,029
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611	2,547	2,344	2,232	2,161	2,112	2,076	2,048	2,025	2,007
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,763	2,669	2,592	2,529	2,325	2,213	2,142	2,092	2,056	2,028	2,005	1,987
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,026	2,867	2,746	2,651	2,575	2,511	2,307	2,195	2,124	2,074	2,037	2,009	1,986	1,968
35	5,485	4,106	3,517	3,179	2,956	2,796	2,676	2,581	2,504	2,440	2,235	2,122	2,049	1,999	1,961	1,932	1,909	1,890
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452	2,388	2,182	2,068	1,994	1,943	1,905	1,875	1,852	1,832
45	5,377	4,009	3,422	3,086	2,864	2,705	2,584	2,489	2,412	2,348	2,141	2,026	1,952	1,900	1,861	1,831	1,807	1,788
50	5,340	3,975	3,390	3,054	2,833	2,674	2,553	2,458	2,381	2,317	2,109	1,993	1,919	1,866	1,827	1,796	1,772	1,752

**Критические значения H -критерия Крускала-Уоллиса
для разных сочетаний n_1, n_2 и n_3**

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Различия между тремя выборками можно считать достоверными на указанном в таблице уровне значимости, если $H_{эмп} \geq H_{0,05}$.

Объемы выборок					Объемы выборок					Объемы выборок							
n_1	n_2	n_3	H	p	n_1	n_2	n_3	H	p	n_1	n_2	n_3	H	p			
2	1	1	2,7000	0,500	4	4	1	6,6667	0,010	5	4	1	6,9545	0,008			
2	2	1	3,6000	0,200				6,1667	0,022				6,8400	0,011			
2	2	2	4,5714	0,067				4,9667	0,048				4,9855	0,044			
3	1	1	3,2000	0,300				4,8667	0,054				4,8600	0,056			
3	2	2	4,2857	0,100				4,1667	0,082				3,9873	0,098			
			3,8571	0,133				4,0667	0,102				3,9600	0,102			
3	2	2	3,3572	0,029	4	4	2	7,0364	0,006	5	4	2	7,2045	0,009			
			4,7143	0,048				6,8727	0,011				7,1182	0,010			
			4,5000	0,067				5,4545	0,046				5,2727	0,049			
			4,4643	0,105				5,2364	0,052				5,2682	0,050			
			3	3				1	5,1429				0,043	4,5545	0,098	4,5409	0,098
4,5714	0,100	4,4455							0,103				4,5182	0,101			
4,0000	0,129	4			4	3	7,1439		0,010	5	4	3	7,4449	0,010			
3	3		2	6,2500			0,011	7,1364	0,011				7,3949	0,011			
				5,3611			0,032	5,5985	0,049				5,6564	0,049			
				5,1389			0,061	5,5758	0,051				5,6308	0,050			
				4,5556			0,100	4,5455	0,099				4,5487	0,099			
				4,2500			0,121	4,4773	0,102				4,5231	0,103			
3	3	3	7,2000	0,004	4	4	4	7,6538	0,008	5	4	4	7,7604	0,009			
			6,4889	0,011				7,5385	0,011				7,7440	0,011			
			5,6889	0,029				5,6923	0,049				5,6571	0,049			
			5,6000	0,050				5,6538	0,054				5,6176	0,050			
			5,0667	0,086				4,6539	0,097				4,6187	0,100			
4,6222	0,100	4,5001	0,104	4,5527				0,102									
4	1	1	3,5714	0,200	5	1	1	3,0571	0,143	5	5	1	7,3091	0,009			
4	2	1	4,0214	0,057	5	2	1	5,2500	0,036				6,8364	0,011			
			4,5000	0,076				5,0000	0,048				5,1273	0,046			
			4,0179	0,114				4,4500	0,071				4,9091	0,053			
			4	2				2	6,0000				0,014	4,2000	0,095	4,1091	0,086
5,3333	0,033	4,0500							0,119				4,0364	0,105			
5,1250	0,052	5			2	2	6,5333		0,008	5	5	2	7,3385	0,010			
4,4583	0,100						6,1333		0,013				7,2692	0,010			
4,1667	0,105						5,1600		0,034				5,3385	0,047			
4	3		1	5,8333			0,021	5,0400	0,056				5,2462	0,051			
				5,2083			0,050	4,3733	0,090				4,6231	0,097			
				5,0000			0,057	4,2933	0,122				4,5077	0,100			
		4,0556		0,093	5	3	1	6,4000	0,012	5	5	3	7,5780	0,010			
3,8889	0,129	4,9600	0,048	7,5429				0,010									
4	3	2	4,8711	0,052				5,7055	0,046								
			6,3000	0,011				5,6264	0,051								
			5,4444	0,046				3,8400	0,123				4,5451	0,100			
			5,4000	0,051				5	3				2	6,9091	0,009	4,5363	0,102
			4,5111	0,098	6,8218	0,010	5			5	4	7,8229		0,010			
4,4444	0,102	5,2509	0,049	7,7914	0,010												
4	3	3	6,7455	0,010	5,1055	0,052						5,6657		0,049			
			6,7091	0,013	4,6509	0,091						5,6429		0,050			
			5,7909	0,046	4,4945	0,101						4,5229		0,099			
			5,7273	0,050	5	3		3	7,0788			0,009	4,5200	0,101			
			4,7091	0,092			6,9818		0,011	5	5	5	8,0000	0,009			
4,7000	0,101	5,6485	0,049	7,9800			0,010										
									5,5152				0,051	5,7800	0,049		
									4,5333				0,097	5,6600	0,051		
									4,4121				0,109	4,5600	0,100		
													4,5000	0,102			

Критические значения S-критерия тенденций Джонкира
 для количества групп от трех до шести ($3 \leq c \leq 6$) и количества испытуемых
 в каждой группе от двух до десяти ($2 \leq n \leq 10$)

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Тенденция является достоверной, если $S_{эмп} \geq S_{0,05}$, и тем более достоверной, если $S_{эмп} \geq S_{0,01}$.

c	N								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p = 1,05$									
3	10	17	24	33	42	53	64	76	88
4	14	26	38	51	66	82	100	118	138
5	20	34	51	71	92	115	140	166	194
6	26	44	67	93	121	151	184	219	256
$p = 1,01$									
3	-	23	32	45	59	74	90	106	124
4	20	34	50	71	92	115	140	167	195
5	26	48	72	99	129	162	197	234	274
6	34	62	94	130	170	213	260	309	361

Критические значения G-критерия знаков

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Преобладание «типичного» сдвига является достоверным, если $G_{эм} \leq G_{0,05}$, и тем более достоверным, если $G_{эм} \leq G_{0,01}$.

n	p		n	p		n	p		n	p	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0	-	27	8	7	49	18	15	92	37	34
6	0	-	28	8	7	50	18	16	94	38	35
7	0	0	29	9	7	52	19	17	96	39	36
8	1	0	30	10	8	54	20	18	98	40	37
9	1	0	31	10	8	56	21	18	100	41	37
10	1	0	32	10	8	58	22	19	110	45	42
11	2	1	33	11	9	60	23	20	120	50	46
12	2	1	34	11	9	62	24	21	130	55	51
13	3	1	35	12	10	64	24	22	140	59	55
14	3	2	36	12	10	66	25	23	150	64	60
15	3	2	37	13	10	68	26	23	160	69	64
16	4	2	38	13	11	70	27	24	170	73	69
17	4	3	39	13	11	72	28	25	180	78	73
18	5	3	40	14	12	74	29	26	190	83	78
19	5	4	41	14	12	76	30	27	200	87	83
20	5	4	42	15	13	78	31	28	220	97	92
21	6	4	43	15	13	80	32	29	240	106	101
22	6	5	44	16	13	82	33	30	260	116	110
23	7	5	45	16	14	84	33	30	280	125	120
24	7	5	46	16	14	86	34	31	300	135	129
25	7	6	47	17	15	88	35	32			
26	8	6	48	17	15	90	36	33			

Критические значения T -критерия Вилкоксона

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

«Типичный» сдвиг является достоверно преобладающим по интенсивности, если $T_{эм} \leq T_{0,05}$, и тем более достоверно преобладающим, если $T_{эм} \leq T_{0,01}$.

n	P		n	P	
	0,1	0,05		0,1	0,05
5	0	—	28	130	101
6	2	—	29	140	110
7	3	0	30	151	120
8	5	1	31	163	130
9	8	3	32	175	140
10	10	5	33	187	151
11	13	7	34	200	162
12	17	9	35	213	173
13	21	12	36	227	185
14	25	15	37	241	198
15	30	19	38	256	211
16	35	23	39	271	224
17	41	27	40	286	238
18	47	32	41	302	252
19	53	37	42	319	266
20	60	43	43	336	281
21	67	49	44	353	296
22	75	55	45	371	312
23	83	62	46	389	328
24	91	69	47	407	345
25	100	76	48	426	362
26	110	84	49	446	379
27	119	92	50	466	397

Приложение 16.1

Критические значения χ_r^2 -критерия Фридмана для количества условий $c = 3$ и количества испытуемых от двух до девяти ($2 \leq n \leq 9$)

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Различия между условиями можно считать достоверными на указанном в таблице уровне значимости, если $\chi_{r \text{ эмп}}^2$ достигает соответствующего критического значения или превышает его.

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$	
χ_p^2	P	χ_p^2	P	χ_p^2	P	χ_p^2	p
0	1,000	0,000	1,000	0,0	1,000	0,0	1,000
1	0,833	0,667	0,944	0,5	0,931	0,4	0,954
3	0,500	2,000	0,528	1,5	0,653	1,2	0,691
4	0,167	2,667	0,361	2,0	0,431	1,6	0,522
		4,667	0,194	3,5	0,273	2,8	0,367
		6,000	0,028	4,5	0,125	3,6	0,182
				6,0	0,069	4,8	0,124
				6,5	0,042	5,2	0,093
				8,0	0,0046	6,4	0,039
						7,6	0,024
						8,4	0,0085
						10,0	0,00077

$n = 6$		$n = 7$		$n = 8$		$n = 9$	
χ_p^2	P	χ_p^2	P	χ_p^2	P	χ_p^2	P
0,00	1,000	0,000	1,000	0,00	1,000	0,000	1,000
0,33	0,956	0,286	0,964	0,25	0,967	0,222	0,971
1,00	0,740	0,857	0,768	0,75	0,794	0,667	0,814
1,33	0,570	1,143	0,620	1,00	0,654	0,889	0,865
2,33	0,430	2,000	0,486	1,75	0,531	1,556	0,569
3,00	0,252	2,571	0,305	2,25	0,355	2,000	0,398
4,00	0,184	3,429	0,237	3,00	0,285	2,667	0,328
4,33	0,142	3,714	0,192	3,25	0,236	2,889	0,278
5,33	0,072	4,571	0,112	4,00	0,149	3,556	0,187
6,33	0,052	5,429	0,085	4,75	0,120	4,222	0,154
7,00	0,029	6,000	0,052	5,25	0,079	4,667	0,107
8,33	0,012	7,143	0,027	6,25	0,047	5,556	0,069
9,00	0,0081	7,714	0,021	6,75	0,038	6,000	0,057
9,33	0,0055	8,000	0,016	7,00	0,030	6,222	0,048
10,33	0,0017	8,857	0,0084	7,75	0,018	6,889	0,031
12,00	0,00013	10,286	0,0036	9,00	0,0099	8,000	0,019
		10,571	0,0027	9,25	0,0080	8,222	0,016
		11,143	0,0012	9,75	0,0048	8,667	0,010
		12,286	0,00032	10,75	0,0024	9,556	0,0060
		14,000	0,000021	12,00	0,0011	10,667	0,0035
				12,25	0,00086	10,889	0,0029
				13,00	0,00026	11,556	0,0013
				14,25	0,000061	12,667	0,00066
				16,00	0,0000036	13,556	0,00035
						14,000	0,00020
						14,222	0,000097
						14,889	0,000054
						16,222	0,000011
						18,000	0,0000006

Приложение 16.2

Критические значения χ_r^2 -критерия Фридмана для количества условий $c = 4$ и количества испытуемых от двух до четырех ($2 \leq n \leq 9$)

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Различия между условиями можно считать достоверными на указанном в таблице уровне значимости, если $\chi_{r\text{ эм}}^2$ достигает соответствующего критического значения или превышает его.

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$			
χ_p^2	P	χ_p^2	P	χ_p^2	P	χ_p^2	$-P$
0,0	1,000	0,0	1,000	0,0	1,000	5,7	0,141
0,6	0,958	0,6	0,958	0,3	0,992	6,0	0,105
1,2	0,834	1,0	0,910	0,6	0,928	6,3	0,094
1,8	0,792	1,8	0,727	0,9	0,900	6,6	0,077
2,4	0,625	2,2	0,608	1,2	0,800	6,9	0,068
3,0	0,542	2,6	0,524	1,5	0,754	7,2	0,054
3,6	0,458	3,4	0,446	1,8	0,677	7,5	0,052
4,2	0,375	3,8	0,342	2,1	0,649	7,8	0,036
4,8	0,208	4,2	0,300	2,4	0,524	8,1	0,033
5,4	0,167	5,0	0,207	2,7	0,508	8,4	0,019
6,0	0,042	5,4	0,175	3,0	0,432	8,7	0,014
		5,8	0,148	3,3	0,389	9,3	0,012
		6,6	0,075	3,6	0,355	9,6	0,0069
		7,0	0,054	3,9	0,324	9,9	0,0062
		7,4	0,033	4,5	0,242	10,2	0,0027
		8,2	0,017	4,8	0,200	10,8	0,0016
		9,0	0,0017	5,1	0,190	11,1	0,00094
				5,4	0,158	12,0	0,000072

Приложение 17

Критические значения L -критерия тенденций Пейджа

для количества условий от трех до шести ($3 \leq c \leq 6$) и количества испытуемых от двух до двенадцати ($2 \leq n \leq 12$)

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Тенденция является достоверной, если $L_{эм} \geq L_{0,05}$, и тем более достоверной, если $L_{эм} \geq L_{0,01}$.

n	C (количество условий)				p
	3	4	5	6	
2			109	178	0,001
	—	60	106	173	0,01
	28	58	103	166	0,05
3	—	89	160	260	0,001
	42	87	155	252	0,01
	41	84	150	244	0,05
4	56	117	210	341	0,001
	55	114	204	331	0,01
	54	111	197	321	0,05
5	70	145	259	420	0,001
	68	141	251	409	0,01
	66	137	244	397	0,05
6	83	172	307	499	0,001
	81	167	299	486	0,01
	79	163	291	474	0,05
7	96	198	355	577	0,001
	93	193	346	563	0,01
	91	189	338	550	0,05
8	109	225	403	655	0,001
	106	220	393	640	0,01
	104	214	384	625	0,05
9	121	252	451	733	0,001
	119	246	441	717	0,01
	116	240	431	701	0,05
10	134	278	499	811	0,001
	131	272	487	793	0,01
	128	266	477	777	0,05
11	147	305	546	888	0,001
	144	298	534	869	0,01
	141	292	523	852	0,05
12	160	331	593	965	0,001
	156	324	581	946	0,01
	153	317	570	928	0,05

Критические значения χ^2 -критерия Пирсона
при разном числе степеней свободы ν

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Различия между двумя распределениями могут считаться достоверными, если $\chi^2_{\text{эмп}} \geq \chi^2_{0,05}$,
и тем более достоверными, если $\chi^2_{\text{эмп}} \geq \chi^2_{0,01}$.

<i>p</i>			<i>p</i>			<i>P</i>		
ν	0,05	0,01	ν	0,05	0,01	ν	0,05	0,01
1	3,841	6,635	35	49,802	57,342	69	89,391	99,227
2	5,991	9,210	36	50,998	58,619	70	90,631	100,425
3	7,815	11,345	37	52,192	59,892	71	91,670	101,621
4	9,488	13,277	38	53,384	61,162	72	92,808	102,816
5	11,070	15,086	39	54,572	62,428	73	93,945	104,010
6	12,592	16,812	40	55,758	63,691	74	95,081	105,202
7	14,067	18,475	41	56,942	64,950	75	96,217	106,393
8	15,507	20,090	42	58,124	66,206	76	97,351	107,582
9	16,919	21,666	43	59,304	67,459	77	98,484	108,771
10	18,307	23,209	44	60,481	68,709	78	99,617	109,958
11	19,675	24,725	45	61,656	69,957	79	100,749	111,144
12	21,026	26,217	46	62,830	71,201	80	101,879	112,329
13	22,362	27,688	47	64,001	72,443	81	103,010	113,512
14	23,685	29,141	48	65,171	73,683	82	104,139	114,695
15	24,996	30,578	49	66,339	74,919	83	105,267	115,876
16	26,296	32,000	50	67,505	76,154	84	106,395	117,057
17	27,587	33,409	51	68,669	77,386	85	107,522	118,236
18	28,869	34,805	52	69,832	78,616	86	108,648	119,414
19	30,144	36,191	53	70,993	79,843	87	109,773	120,591
20	31,410	37,566	54	72,153	81,069	88	110,898	121,767
21	32,671	38,932	55	73,311	82,292	89	112,022	122,942
22	33,924	40,289	56	74,468	83,513	90	113,145	124,116
23	35,172	41,638	57	75,624	84,733	91	114,268	125,289
24	36,415	42,980	58	76,778	85,950	92	115,390	126,462
25	37,652	44,314	59	77,931	87,166	93	116,511	127,633
26	38,885	45,642	60	79,082	88,379	94	117,632	128,803
27	40,113	46,963	61	80,232	89,591	95	118,752	129,973
28	41,337	48,278	62	81,381	90,802	96	119,871	131,141
29	42,557	49,588	63	82,529	92,010	97	120,990	132,309
30	43,773	50,892	64	83,675	93,217	98	122,108	133,476
31	44,985	52,191	65	84,821	94,422	99	123,225	134,642
32	46,194	53,486	66	85,965	95,626	100	124,342	135,807
33	47,400	54,776	67	87,108	96,828			
34	48,602	56,061	68	88,250	98,028			

Критические значения d_{max}
при сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Различия между распределениями могут считаться достоверными, если абсолютная величина максимальной разности $d_{эм} \geq d_{0,05}$, и тем более достоверными, если $d_{эм} \geq d_{0,01}$.

n	Максимальный модуль разности накопленных d_{max}		n	Максимальный модуль разности накопленных d_{max}	
	$p = 0,05$	$p = 0,01$		$p = 0,05$	$p = 0,01$
5	0,6074	0,7279	50	0,1921	0,2302
10	0,4295	0,5147	60	0,1753	0,2101
15	0,3507	0,4202	70	0,1623	0,1945
20	0,3037	0,3639	80	0,1518	0,1820
25	0,2716	0,3255	90	0,1432	
30	0,2480	0,2972	100	0,1358	
40	0,2147	0,2574	>100	$1,36/\sqrt{n}$	$1,63/\sqrt{n}$

Критерий λ Колмогорова-Смирнова

для сопоставления эмпирического распределения с теоретическим (при $n > 50$) или двух эмпирических распределений (при $n > 50$) между собой: уровни статистической значимости разных значений $\lambda_{\text{эмп}}$

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

По полученному значению $\lambda_{\text{эмп}}$ определяется уровень значимости различий между двумя распределениями.

λ	λ – последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	ρ – десятичные знаки («0» – опущен)									
0,3	99999	99998	99995	99991	99983	99970	99949	99917	99872	99807
0,4	99719	99603	99452	99262	99027	98741	98400	97998	97532	96998
0,5	96394	95719	94969	94147	93250	92282	91242	90134	88960	87724
0,6	86428	85077	83678	82225	80732	79201	77636	76042	74422	72781
0,7	71124	69453	67774	66089	64402	62717	61036	59363	57700	56050
0,8	54414	52796	51197	49619	48063	46532	45026	43545	42093	40668
0,9	39273	37907	36571	35266	33992	32748	31536	30356	29206	28087
1,0	27000	25943	24917	23922	22957	22021	21114	20236	19387	18566
1,1	17772	17005	16264	15550	14861	14196	13556	12939	12345	11774
1,2	11225	10697	10190	09703	09235	08787	08357	07944	07550	07171
1,3	06809	06463	06132	05815	05513	05224	04949	04686	04435	04196
1,4	03968	03751	03545	03348	03162	02984	02815	02655	02503	02359
1,5	02222	02092	01969	01852	01742	01638	01539	01446	01357	01274
1,6	01195	01121	01051	00985	00922	00864	00808	00756	00707	00661
1,7	00618	00577	00539	00503	00469	00438	00408	00380	00354	00330
1,8	00307	00285	00265	00247	00229	00213	00198	00186	00170	00158
1,9	00146	00136	00126	00116	00108	00100	00092	00085	00079	00073
2,0	00067	00062	00057	00053	00048	00045	00041	00038	00035	00032
2,1	00030	00027	00025	00023	00021	00019	00018	00016	00015	00014
2,2	00013	00011	00010	00010	00009	00008	00007	00007	00006	00006
2,3	00005	00005	00004	00004	00004	00003	00003	00003	00002	00002
2,4	00002	00002	00002	00001	00001	00001	00001	00001	00001	00001

Приложение 21

Величины угла φ (в радианах) для разных процентных долей $\varphi = 2 \cdot \arcsin \sqrt{P}$
(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

% доля	% – последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Значения $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{P}$									
0,0	0,000	0,020	0,028	0,035	0,040	0,045	0,049	0,053	0,057	0,060
0,1	0,063	0,066	0,069	0,072	0,075	0,077	0,080	0,082	0,085	0,087
0,2	0,089	0,092	0,094	0,096	0,098	0,100	0,102	0,104	0,106	0,108
0,3	0,110	0,111	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120	0,122	0,123	0,125
0,4	0,127	0,128	0,130	0,131	0,133	0,134	0,136	0,137	0,139	0,140
0,5	0,142	0,143	0,144	0,146	0,147	0,148	0,150	0,151	0,153	0,154
0,6	0,155	0,156	0,158	0,159	0,160	0,161	0,163	0,164	0,165	0,166
0,7	0,168	0,169	0,170	0,171	0,172	0,173	0,175	0,176	0,177	0,178
0,8	0,179	0,180	0,182	0,183	0,184	0,185	0,186	0,187	0,188	0,189
0,9	0,190	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,196	0,197	0,198	0,199
1	0,200	0,210	0,220	0,229	0,237	0,246	0,254	0,262	0,269	0,277
2	0,284	0,291	0,298	0,304	0,311	0,318	0,324	0,330	0,336	0,342
3	0,348	0,354	0,360	0,365	0,371	0,376	0,382	0,387	0,392	0,398
4	0,403	0,408	0,413	0,418	0,423	0,428	0,432	0,437	0,442	0,446
5	0,451	0,456	0,460	0,465	0,469	0,473	0,478	0,482	0,486	0,491
6	0,495	0,499	0,503	0,507	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532
7	0,536	0,539	0,543	0,547	0,551	0,555	0,559	0,562	0,566	0,570
8	0,574	0,577	0,581	0,584	0,588	0,592	0,595	0,599	0,602	0,606
9	0,609	0,613	0,616	0,620	0,623	0,627	0,630	0,633	0,637	0,640
10	0,644	0,647	0,650	0,653	0,657	0,660	0,663	0,666	0,670	0,673
11	0,676	0,679	0,682	0,686	0,689	0,692	0,695	0,698	0,701	0,704
12	0,707	0,711	0,714	0,717	0,720	0,723	0,726	0,729	0,732	0,735
13	0,738	0,741	0,744	0,747	0,750	0,752	0,755	0,758	0,761	0,764
14	0,767	0,770	0,773	0,776	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790	0,793
15	0,795	0,798	0,801	0,804	0,807	0,809	0,812	0,815	0,818	0,820
16	0,823	0,826	0,828	0,831	0,834	0,837	0,839	0,842	0,845	0,847
17	0,850	0,853	0,855	0,858	0,861	0,863	0,866	0,868	0,871	0,874
18	0,876	0,879	0,881	0,884	0,887	0,889	0,892	0,894	0,897	0,900
19	0,902	0,905	0,907	0,910	0,912	0,915	0,917	0,920	0,922	0,925
20	0,927	0,930	0,932	0,935	0,937	0,940	0,942	0,945	0,947	0,950
21	0,952	0,955	0,957	0,959	0,962	0,964	0,967	0,969	0,972	0,974
22	0,976	0,979	0,981	0,984	0,986	0,988	0,991	0,993	0,996	0,998
23	1,000	1,003	1,005	1,007	1,010	1,012	1,015	1,017	1,019	1,022
24	1,024	1,026	1,029	1,031	1,033	1,036	1,038	1,040	1,043	1,045
25	1,047	1,050	1,052	1,054	1,056	1,059	1,061	1,063	1,066	1,068
26	1,070	1,072	1,075	1,077	1,079	1,082	1,084	1,086	1,088	1,091
27	1,093	1,095	1,097	1,100	1,102	1,104	1,106	1,109	1,111	1,113
28	1,115	1,117	1,120	1,122	1,124	1,126	1,129	1,131	1,133	1,135
29	1,137	1,140	1,142	1,144	1,146	1,148	1,151	1,153	1,155	1,157
30	1,159	1,161	1,164	1,166	1,168	1,170	1,172	1,174	1,177	1,179

%	% – последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
доля	Значения $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{P}$									
31	1,182	1,183	1,185	1,187	1,190	1,192	1,194	1,196	1,198	1,200
32	1,203	1,205	1,207	1,209	1,211	1,213	1,215	1,217	1,220	1,222
33	1,224	1,226	1,228	1,230	1,232	1,234	1,237	1,239	1,241	1,243
34	1,245	1,247	1,249	1,251	1,254	1,256	1,258	1,260	1,262	1,264
35	1,266	1,268	1,270	1,272	1,274	1,277	1,279	1,281	1,283	1,285
36	1,287	1,289	1,291	1,293	1,295	1,297	1,299	1,302	1,304	1,306
37	1,308	1,310	1,312	1,314	1,316	1,318	1,320	1,322	1,324	1,326
38	1,328	1,330	1,333	1,335	1,337	1,339	1,341	1,343	1,345	1,347
39	1,349	1,351	1,353	1,355	1,357	1,359	1,361	1,363	1,365	1,367
40	1,369	1,371	1,374	1,376	1,378	1,380	1,382	1,384	1,386	1,388
41	1,390	1,392	1,394	1,396	1,398	1,400	1,402	1,404	1,406	1,408
42	1,410	1,412	1,414	1,416	1,418	1,420	1,422	1,424	1,426	1,428
43	1,430	1,432	1,434	1,436	1,438	1,440	1,442	1,444	1,446	1,448
44	1,451	1,453	1,455	1,457	1,459	1,461	1,463	1,465	1,467	1,469
45	1,471	1,473	1,475	1,477	1,479	1,481	1,483	1,485	1,487	1,489
46	1,491	1,493	1,495	1,497	1,499	1,501	1,503	1,505	1,507	1,509
47	1,511	1,513	1,515	1,517	1,519	1,521	1,523	1,525	1,527	1,529
48	1,531	1,533	1,535	1,537	1,539	1,541	1,543	1,545	1,547	1,549
49	1,551	1,553	1,555	1,557	1,559	1,561	1,563	1,565	1,567	1,569
50	1,571	1,573	1,575	1,577	1,579	1,581	1,583	1,585	1,587	1,589
51	1,591	1,593	1,595	1,597	1,599	1,601	1,603	1,605	1,607	1,609
52	1,611	1,613	1,615	1,617	1,619	1,621	1,623	1,625	1,627	1,629
53	1,631	1,633	1,635	1,637	1,639	1,641	1,643	1,645	1,647	1,649
54	1,651	1,653	1,655	1,657	1,659	1,661	1,663	1,665	1,667	1,669
55	1,671	1,673	1,675	1,677	1,679	1,681	1,683	1,685	1,687	1,689
56	1,691	1,693	1,695	1,697	1,699	1,701	1,703	1,705	1,707	1,709
57	1,711	1,713	1,715	1,717	1,719	1,721	1,723	1,725	1,727	1,729
58	1,731	1,734	1,736	1,738	1,740	1,742	1,744	1,746	1,748	1,750
59	1,752	1,754	1,756	1,758	1,760	1,762	1,764	1,766	1,768	1,770
60	1,772	1,774	1,776	1,778	1,780	1,782	1,784	1,786	1,789	1,791
61	1,793	1,795	1,797	1,799	1,801	1,803	1,805	1,807	1,809	1,811
62	1,813	1,815	1,817	1,819	1,821	1,823	1,826	1,828	1,830	1,832
63	1,834	1,836	1,838	1,840	1,842	1,844	1,846	1,848	1,850	1,853
64	1,855	1,857	1,859	1,861	1,863	1,865	1,867	1,869	1,871	1,873
65	1,875	1,878	1,880	1,882	1,884	1,886	1,888	1,890	1,892	1,894
66	1,897	1,899	1,901	1,903	1,905	1,907	1,909	1,911	1,913	1,916
67	1,918	1,920	1,922	1,924	1,926	1,928	1,930	1,933	1,935	1,937
68	1,939	1,941	1,943	1,946	1,948	1,950	1,952	1,954	1,956	1,958
69	1,961	1,963	1,965	1,967	1,969	1,971	1,974	1,976	1,978	1,980
70	1,982	1,984	1,987	1,989	1,991	1,993	1,995	1,998	2,000	2,002

% доля	% – последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Значения $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{P}$									
71	2,004	2,006	2,009	2,011	2,013	2,015	2,018	2,020	2,022	2,024
72	2,026	2,029	2,031	2,033	2,035	2,038	2,040	2,042	2,044	2,047
73	2,049	2,051	2,053	2,056	2,058	2,060	2,062	2,065	2,067	2,069
74	2,071	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,085	2,087	2,090	2,092
75	2,094	2,097	2,099	2,101	2,104	2,106	2,108	2,111	2,113	2,115
76	2,118	2,120	2,122	2,125	2,127	2,129	2,132	2,134	2,136	2,139
77	2,141	2,144	2,146	2,148	2,151	2,153	2,156	2,158	2,160	2,163
78	2,165	2,168	2,170	2,172	2,175	2,177	2,180	2,182	2,185	2,187
79	2,190	2,192	2,194	2,197	2,199	2,202	2,204	2,207	2,209	2,212
80	2,214	2,217	2,219	2,222	2,224	2,227	2,229	2,231	2,234	2,237
81	2,240	2,242	2,245	2,247	2,250	2,252	2,255	2,258	2,260	2,263
82	2,265	2,268	2,271	2,273	2,276	2,278	2,281	2,284	2,286	2,289
83	2,292	2,294	2,297	2,300	2,302	2,305	2,308	2,310	2,313	2,316
84	2,319	2,321	2,324	2,327	2,330	2,332	2,335	2,338	2,341	2,343
85	2,346	2,349	2,352	2,355	2,357	2,360	2,363	2,366	2,369	2,372
86	2,375	2,377	2,380	2,383	2,386	2,389	2,392	2,395	2,398	2,401
87	2,404	2,407	2,410	2,413	2,416	2,419	2,422	2,425	2,428	2,431
88	2,434	2,437	2,440	2,443	2,447	2,450	2,453	2,456	2,459	2,462
89	2,465	2,469	2,472	2,475	2,478	2,482	2,485	2,488	2,491	2,495
90	2,498	2,501	2,505	2,508	2,512	2,515	2,518	2,522	2,525	2,529
91	2,532	2,536	2,539	2,543	2,546	2,550	2,554	2,557	2,561	2,564
92	2,568	2,572	2,575	2,579	2,583	2,587	2,591	2,594	2,598	2,602
93	2,606	2,610	2,614	2,618	2,622	2,626	2,630	2,634	2,638	2,642
94	2,647	2,651	2,655	2,659	2,664	2,668	2,673	2,677	2,681	2,686
95	2,691	2,695	2,700	2,705	2,709	2,714	2,719	2,724	2,729	2,734
96	2,739	2,744	2,749	2,754	2,760	2,765	2,771	2,776	2,782	2,788
97	2,793	2,799	2,805	2,811	2,818	2,824	2,830	2,837	2,844	2,851
98	2,858	2,865	2,872	2,880	2,888	2,895	2,904	2,913	2,922	2,930
99,0	2,940	2,942	2,943	2,944	2,945	2,946	2,948	2,949	2,950	2,951
99,1	2,952	2,953	2,954	2,955	2,956	2,957	2,958	2,959	2,960	2,961
99,2	2,963	2,964	2,965	2,966	2,967	2,968	2,969	2,971	2,972	2,973
99,3	2,974	2,975	2,976	2,978	2,979	2,980	2,981	2,983	2,984	2,985
99,4	2,987	2,988	2,989	2,990	2,992	2,993	2,995	2,996	2,997	2,999
99,5	3,000	3,002	3,003	3,004	3,006	3,007	3,009	3,010	3,012	3,013
99,6	3,015	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,028	3,030
99,7	3,032	3,034	3,036	3,038	3,040	3,041	3,044	3,046	3,048	3,050
99,8	3,052	3,054	3,057	3,059	3,062	3,064	3,067	3,069	3,072	3,075
99,9	3,078	3,082	3,085	3,089	3,093	3,097	3,101	3,107	3,113	3,122
100	3,142									

**Уровни статистической значимости разных значений
 φ^* -критерия Фишера**

По полученному значению $\varphi^*_{эмт}$ определяется уровень значимости различий
процентных долей

ρ равно или меньше	ρ равно или меньше (последний десятичный знак)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	2,91	2,81	2,70	2,62	2,55	2,49	2,44	2,39	2,35	
0,01	2,31	2,28	2,25	2,22	2,19	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07
0,02	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,92	1,91	1,89
0,03	1,88	1,86	1,85	1,84	1,82	1,81	1,80	1,79	1,77	1,76
0,04	1,75	1,74	1,73	1,72	1,71	1,70	1,68	1,67	1,66	1,65
0,05	1,64	1,64	1,63	1,62	1,61	1,60	1,59	1,58	1,57	1,56
0,06	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	1,52	1,51	1,50	1,49	1,48
0,07	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41
0,08	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	1,35
0,09	1,34	1,34	1,33	1,32	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,29
0,10	1,29									

Приложение 23

Критические значения F -критерия Фишера:

df_1 – число степеней свободы в числителе,

df_2 – число степеней свободы в знаменателе

(Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. СПб., 2006)

Влияние фактора или взаимодействия факторов достоверно, если $F_{эмп} \geq F_{0,05}$,
и тем более достоверно, если $F_{эмп} \geq F_{0,01}$.

df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
df_2	$p < 0,05$											
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
df_2	$p < 0,01$											
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,29	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55

df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
df_2	$p \leq 0,05$											
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	3,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,34	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,26	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,24	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22	2,18
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	2,16	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09
32	4,15	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,32	2,25	2,19	2,14	2,10	2,07
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,30	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05
df_2	$p \leq 0,01$											
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,85	3,71	3,60	3,51	3,44	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,71	3,56	3,45	3,37	3,30	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,65	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,25	3,17	3,09	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,21	3,13	3,05	2,99
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,17	3,09	3,02	2,96
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,79	3,56	3,39	3,26	3,14	3,06	2,98	2,93
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,76	3,53	3,36	3,23	3,11	3,03	2,95	2,90
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,08	3,00	2,92	2,87
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,06	2,98	2,90	2,84
32	7,50	5,34	4,46	3,97	3,66	3,42	3,25	3,12	3,01	2,94	2,86	2,80
34	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,38	3,21	3,08	2,97	2,89	2,82	2,76

df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
df_2	$p \leq 0,05$											
36	4,11	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10	2,06	2,03
38	4,10	3,25	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04	2,00
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,02	1,99
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,14	2,09	2,04	2,00	1,97
48	4,04	3,19	2,80	2,56	2,41	2,30	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98	1,95
55	4,02	3,17	2,78	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,05	2,00	1,97	1,93
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,02	1,98	1,94	1,90
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93	1,89
80	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99	1,95	1,91	1,88
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,88	1,85
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,95	1,90	1,86	1,83
150	3,91	3,06	2,67	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83	1,80
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75
df_2	$p \leq 0,01$											
36	7,39	5,25	4,38	3,89	3,58	3,35	3,18	3,04	2,94	2,86	2,78	2,72
38	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,91	2,82	2,75	2,69
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,88	2,80	2,73	2,66
42	7,27	5,15	4,29	3,80	3,49	3,26	3,10	2,96	2,86	2,77	2,70	2,64
44	7,24	5,12	4,26	3,78	3,46	3,24	3,07	2,94	2,84	2,75	2,68	2,62
46	7,21	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,05	2,92	2,82	2,73	2,66	2,60
48	7,19	5,08	4,22	3,74	3,42	3,20	3,04	2,90	2,80	2,71	2,64	2,58
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,18	3,02	2,88	2,78	2,70	2,62	2,56
55	7,12	5,01	4,16	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,59	2,53
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
65	7,04	4,95	4,10	3,62	3,31	3,09	2,93	2,79	2,70	2,61	2,54	2,47
70	7,01	4,92	4,08	3,60	3,29	3,07	2,91	2,77	2,67	2,59	2,51	2,45
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,25	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,41
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,20	2,99	2,82	2,69	2,59	2,51	2,43	2,36
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,65	2,56	2,47	2,40	2,33
150	6,81	4,75	3,91	3,44	3,14	2,92	2,76	2,62	2,53	2,44	2,37	2,30
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,90	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,28
400	6,70	4,66	3,83	3,36	3,06	2,85	2,69	2,55	2,46	2,37	2,29	2,23
1000	6,66	4,62	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,26	2,20
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,24	2,18

df_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
df_2	$p \leq 0,05$											
1	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
2	19,42	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,47	19,48	19,49	19,49	19,50	19,50
3	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,60	8,58	8,57	8,56	8,54	8,54	8,53
4	5,87	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,70	5,68	5,66	5,65	5,64	5,63
5	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	5,44	4,42	4,40	4,38	4,37	4,36
6	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,72	3,71	3,69	3,68	3,67
7	3,52	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,28	3,25	3,24	3,23
8	3,23	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00	2,98	2,96	2,94	2,93
9	3,02	2,98	2,93	2,90	2,86	2,82	2,89	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71
10	2,86	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,64	2,61	2,59	2,56	2,55	2,54
11	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,50	2,47	2,45	2,42	2,41	2,40
12	2,64	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,36	2,35	2,32	2,31	2,30
13	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,28	2,26	2,24	2,22	2,21
14	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	2,13
15	2,43	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,07
16	2,37	2,33	2,28	2,24	2,20	2,16	2,13	2,09	2,07	2,04	2,02	2,01
df_2	$p \leq 0,01$											
1	6142	6169	6208	6234	6261	6286	6302	6323	6334	6352	6361	6366
2	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,49	99,49	99,49	99,50	99,50
3	26,92	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,35	26,27	26,23	26,18	26,14	26,12
4	14,24	14,15	14,02	13,93	13,83	13,74	13,69	13,61	13,57	13,52	13,48	13,46
5	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,17	9,13	9,07	9,04	9,02
6	7,60	7,52	7,39	7,31	7,23	7,14	7,09	7,02	6,99	6,94	6,90	6,88
7	6,35	6,27	6,15	6,07	5,98	5,90	5,85	5,78	5,75	5,70	5,67	5,65
8	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,11	5,06	5,00	4,96	4,91	4,88	4,86
9	5,00	4,92	4,80	4,73	4,64	4,56	4,51	4,45	4,41	4,36	4,33	4,31
10	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,05	4,01	3,96	3,93	3,91
11	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,80	3,74	3,70	3,66	3,62	3,60
12	4,05	3,98	3,86	3,78	3,70	3,61	3,56	3,49	3,46	3,41	3,38	3,36
13	3,85	3,78	3,67	3,59	3,51	3,42	3,37	3,30	3,27	3,21	3,18	3,16
14	3,70	3,62	3,51	3,43	3,34	3,26	3,21	3,14	3,11	3,06	3,02	3,00
15	3,56	3,48	3,36	3,29	3,20	3,12	3,07	3,00	2,97	2,92	2,89	2,87
16	3,45	3,37	3,25	3,18	3,10	3,01	2,96	2,98	2,86	2,80	2,77	2,75

df_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
df_2	$p \leq 0,05$											
17	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11	2,08	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96
18	2,29	2,25	2,19	2,15	2,11	2,07	2,04	2,00	1,98	1,95	1,93	1,92
19	2,26	2,21	2,15	2,11	2,07	2,02	2,00	1,96	1,94	1,91	1,90	1,88
20	2,23	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,96	1,92	1,90	1,87	1,85	1,84
21	2,20	2,15	2,09	2,05	2,00	1,96	1,93	1,89	1,87	1,84	1,82	1,81
22	2,18	2,13	2,07	2,03	1,98	1,93	1,91	1,87	1,84	1,81	1,80	1,78
23	2,14	2,10	2,04	2,00	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76
24	2,13	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80	1,76	1,74	1,73
25	2,11	2,06	2,00	1,96	1,92	1,87	1,84	1,80	1,77	1,74	1,72	1,71
26	2,10	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,78	1,76	1,72	1,70	1,69
27	2,08	2,03	1,97	1,93	1,88	1,84	1,80	1,76	1,74	1,71	1,68	1,67
28	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,67	1,65
29	2,05	2,00	1,94	1,90	1,85	1,80	1,77	1,73	1,71	1,68	1,65	1,64
30	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,69	1,66	1,64	1,62
32	2,02	1,97	1,91	1,86	1,82	1,76	1,74	1,69	1,67	1,64	1,61	1,59
34	2,00	1,95	1,89	1,84	1,80	1,74	1,71	1,67	1,64	1,61	1,59	1,57
df_2	$p \leq 0,01$											
17	3,35	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,86	2,79	2,76	2,70	2,67	2,65
18	3,27	3,19	3,07	3,00	2,91	2,83	2,78	2,71	2,68	2,62	2,59	2,57
19	3,19	3,12	3,00	2,92	2,84	2,76	2,70	2,63	2,60	2,54	2,51	2,49
20	3,13	3,05	2,94	2,86	2,77	2,69	2,63	2,56	2,53	2,47	2,44	2,42
21	3,07	2,99	2,88	2,80	2,72	2,63	2,58	2,51	2,47	2,42	2,38	2,36
22	3,02	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,46	2,42	2,37	2,33	2,31
23	2,97	2,89	2,78	2,70	2,62	2,53	2,48	2,41	2,37	2,32	2,28	2,26
24	2,93	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,36	2,33	2,27	2,23	2,21
25	2,89	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,40	2,32	2,29	2,23	2,19	2,17
26	2,86	2,77	2,66	2,58	2,50	2,41	2,36	2,28	2,25	2,19	2,15	2,13
27	2,83	2,74	2,63	2,55	2,47	2,38	2,33	2,25	2,21	2,16	2,12	2,10
28	2,80	2,71	2,60	2,52	2,44	2,35	2,30	2,22	2,18	2,13	2,09	2,06
29	2,77	2,68	2,57	2,49	2,41	2,32	2,27	2,19	2,15	2,10	2,06	2,03
30	2,74	2,66	2,55	2,47	2,38	2,29	2,24	2,16	2,13	2,07	2,03	2,01
32	2,70	2,62	2,51	2,42	2,34	2,25	2,20	2,12	2,08	2,02	1,98	1,96
34	2,66	2,58	2,47	2,38	2,30	2,21	2,15	2,08	2,04	1,98	1,94	1,91

df_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
df_2	$p \leq 0,05$											
36	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,72	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,55
38	1,96	1,92	1,85	1,80	1,76	1,71	1,67	1,63	1,60	1,57	1,54	1,53
40	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
42	1,94	1,89	1,82	1,78	1,73	1,68	1,64	1,60	1,57	1,54	1,51	1,49
44	1,92	1,88	1,81	1,76	1,72	1,66	1,63	1,58	1,56	1,52	1,50	1,48
46	1,91	1,87	1,80	1,75	1,71	1,65	1,62	1,57	1,54	1,51	1,48	1,46
48	1,90	1,86	1,79	1,74	1,70	1,64	1,61	1,56	1,53	1,50	1,47	1,45
50	1,90	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44
55	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,52	1,50	1,46	1,43	1,41
60	1,86	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39
65	1,85	1,80	1,73	1,68	1,63	1,57	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37
70	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,56	1,53	1,47	1,45	1,40	1,37	1,35
80	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,42	1,38	1,35	1,32
100	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,42	1,39	1,34	1,30	1,28
125	1,77	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,45	1,39	1,36	1,31	1,27	1,25
150	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,47	1,44	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22
200	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
400	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,16	1,13
1000	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
∞	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00
df_2	$p \leq 0,01$											
36	2,62	2,54	2,43	2,35	2,26	2,17	2,12	2,04	2,00	1,94	1,90	1,87
38	2,59	2,51	2,40	2,32	2,22	2,14	2,08	2,00	1,97	1,90	1,86	1,84
40	2,56	2,49	2,37	2,29	2,20	2,11	2,05	1,97	1,94	1,88	1,84	1,81
42	2,54	2,46	2,35	2,26	2,17	2,08	2,02	1,94	1,91	1,85	1,80	1,78
44	2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,06	2,00	1,92	1,88	1,82	1,78	1,75
46	2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,98	1,90	1,86	1,80	1,76	1,72
48	2,48	2,40	2,28	2,20	2,11	2,02	1,96	1,88	1,84	1,78	1,73	1,70
50	2,46	2,39	2,26	2,18	2,10	2,00	1,94	1,86	1,82	1,76	1,71	1,68
55	2,43	2,35	2,23	2,15	2,06	1,96	1,90	1,82	1,78	1,71	1,66	1,64
60	2,40	2,32	2,20	2,12	2,03	1,93	1,87	1,79	1,74	1,68	1,63	1,60
65	2,37	2,30	2,18	2,09	2,00	1,90	1,84	1,76	1,71	1,64	1,60	1,56
70	2,35	2,28	2,15	2,07	1,98	1,88	1,82	1,74	1,69	1,62	1,56	1,53
80	2,32	2,24	2,11	2,03	1,94	1,84	1,78	1,70	1,65	1,57	1,52	1,49
100	2,26	2,19	2,06	1,98	1,89	1,79	1,73	1,64	1,59	1,51	1,46	1,43
125	2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,75	1,68	1,59	1,54	1,46	1,40	1,37
150	2,20	2,12	2,00	1,91	1,83	1,72	1,66	1,56	1,51	1,43	1,37	1,33
200	2,17	2,09	1,97	1,88	1,79	1,69	1,62	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28
400	2,12	2,04	1,92	1,84	1,74	1,64	1,57	1,47	1,42	1,32	1,24	1,19
1000	2,09	2,01	1,89	1,81	1,71	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
∞	2,07	1,99	1,87	1,79	1,69	1,59	1,52	1,41	1,36	1,25	1,15	1,00

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Статистические методы в психологии : типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 04 «Психология» / сост. Н.В. Гапанович-Кайдалов ; Министерство образования Республики Беларусь, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 19 с.
2. Бурлачук, Л.Ф. Психодиагностика : учебник для вузов / Л.Ф. Бурлачук. – СПб. : Питер, 2008. – 384 с.
3. Гапанович-Кайдалов, Н.В. Введение в научное психологическое исследование : учебное пособие / Н.В. Гапанович-Кайдалов. – Минск : АПО, 2005. – 84 с.
4. Гласс, Дж. Статистические методы в педагогике и психологии / Дж. Гласс, Дж. Стенли. – Москва : Прогресс, 1976. – 420 с.
5. Гусак, А.А. Теория вероятностей : справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2002. – 288 с.
6. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – Москва : Высшая школа, 1998. – 400 с.
7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – Москва : Высшая школа, 1999. – 479 с.
8. Гуткин, М.С. Основы измерения в психологии : учебное пособие для вузов / М.С. Гуткин. – Гродно : ГрГУ, 1999. – 120 с.
9. Ермолаев, О.Ю. Математическая статистика для психологов : учебник / О.Ю. Ермолаев. – Москва : Флинта, 2002. – 336 с.
10. Ермолаев-Томин, О.Ю. Математические методы в психологии : учебник для бакалавров / О.Ю. Ермолаев-Томин. – Москва : Юрайт, 2013. – 511 с.
11. Иващенко, Ф.И. Практикум по методологии психологического исследования / Ф.И. Иващенко. – Минск : ФУАинформ, 2003. – 138 с.
12. Кремень, М.А. Математические методы в научных исследованиях: для педагогов и психологов / М.А. Кремень. – Минск : НИО, 1998. – 92 с.
13. Кутейников, А.Н. Математические методы в психологии : учебное пособие / А.Н. Кутейников. – СПб. : Речь, 2008. – 172 с.
14. Лупандин, В.И. Математические методы в психологии : учебное пособие / В.И. Лупандин. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2009. – 175 с.
15. Максимова, О.В. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для студентов средних специальных учебных заведений. – Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2007. – 320 с.
16. Математика для психологов : учебник / А.Н. Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков ; под ред. А.Н. Кричевца. – Москва : Флинта, 2003. – 376 с.
17. Математическое моделирование в психологии : курс лекций [Электронный ресурс]. – 2001. – Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/316497>. – Дата доступа: 02.02.2013.
18. Наследов, А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных : учебное пособие / А.Д. Наследов. – СПб. : Речь, 2006. – 392 с.
19. Немов, Р.С. Психология : учебник для студентов высших педагогических учебных заведений : в 3 кн. / Р.С. Немов. – Москва : ВЛАДОС, 2003. – Кн. 3: Психо-

диагностика. Введение в научное психологическое исследование с элементами математической статистики. – 620 с.

20. *Никандров, В.В.* Экспериментальная психология : учебное пособие / В.В. Никандров. – СПб. : Речь, 2003. – 480 с.

21. Основы математической статистики в психологии : учебно-методическое пособие : в 2 ч. / сост. Н.А. Литвинова, Н.П. Радчикова. – Минск : БГПУ, 2007. – Ч. 1. – 87 с.

22. Основы математической статистики в психологии : учебно-методическое пособие : в 2 ч. / сост. Н.А. Литвинова, Н.П. Радчикова. – Минск : БГПУ, 2007. – Ч. 2. – 44 с.

23. Практикум по математике для студентов-заочников, обучающихся по специальности «Педагогика и методика начального обучения» / сост. Р.О. Кирбай. – Мозырь : МГПУ, 2002. – 54 с.

24. *Радчикова, Н.П.* Экспериментальная психология : методическое пособие / Н.П. Радчикова. – Минск : БГПУ им М. Танка, 2001. – 32 с.

25. *Романюк, Г.Э.* Задачи по основам математической статистики в психологии : методическое пособие / Г.Э. Романюк, Н.П. Радчикова. – Минск : БГПУ им М. Танка, 2002. – 50 с.

26. *Сечко, В.В.* Математические методы обработки психологических данных / В.В. Сечко. – Минск : АПО, 2002. – 78 с.

27. *Сидоренко, Е.В.* Методы математической обработки в психологии / Е.В. Сидоренко. – СПб. : Социально-психологический центр, 2001. – 350 с.

28. *Суходольский, Г.В.* Математическая психология / Г.В. Суходольский. – Харьков : Гуманитарный Центр, 2006. – 360 с.

29. *Суходольский, Г.В.* Математические методы в психологии / Г.В. Суходольский. – Харьков : Гуманитарный Центр, 2008. – 284 с.

30. Суходольский, Г.В. Основы математической статистики для психологов / Г.В. Суходольский. – Ленинград : ЛГУ, 1972. – 430 с.

31. Статистический анализ в маркетинговых исследованиях [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://matica.org.ua/statisticheskiy-analiz-v-marketingovich-issledovaniyach/5-1-1-binarnaya-i-multinomialnaya-logisticheskie-regressii>. – Дата доступа: 20.12.2014.

32. *Халафян, А.А.* STATISTICA 6. Статистический анализ данных : учебник / А.А. Халафян. – Москва : ООО «Бином – Пресс», 2007. – 512 с.

33. *Шевандрин, Н.И.* Основы психологической диагностики : учебник для студентов высших учебных заведений : в 3 ч. / Н.И. Шевандрин. – Москва : ВЛАДОС, 2003. – Ч. 1. – 288 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН КУРСА «СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ».....	5
ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА	6
ЧАСТЬ I КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ.....	13
Тема 1 Способы получения статистических данных в психологии.....	13
Тема 2 Табулирование и наглядное представление данных	23
Тема 3 Вычисление основных статистических показателей: описательные статистики.....	35
Тема 4 Вычисление основных статистических показателей: случайные величины	47
Тема 5 Нормальное распределение	67
Тема 6 Теория оценок.....	78
Тема 7 Проверка статистических гипотез	85
Тема 8 Корреляционный анализ	95
Тема 9 Регрессионный анализ	114
ПРАКТИКУМ	123
Практическое занятие № 1 Способы получения статистических данных в психологии.....	123
Практическое занятие № 2 Табулирование и наглядное представление данных	125
Практическое занятие № 3 Вычисление основных статистических показателей: описательные статистики	128
Практическое занятие № 4 Вычисление основных статистических показателей: случайные величины.....	131
Практическое занятие № 5 Нормальное распределение.....	141
Практическое занятие № 6 Теория оценок.....	143
Практическое занятие № 7 Проверка статистических гипотез	146
Практическое занятие № 8 Корреляционный анализ.....	149
Практическое занятие № 9 Регрессионный анализ	154
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОГРАММИРОВАННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ	158
ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ	183
ЧАСТЬ II КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ	185
Тема 10 Сопоставление совокупностей по уровню и однородности признака ...	185
Тема 11 Оценка достоверности сдвига в значениях исследуемого признака	201
Тема 12 Выявление различий в распределении признака.....	215
Тема 13 Многофункциональные критерии.....	228

Тема 14 Дисперсионный анализ	234
Тема 15 Многомерный статистический анализ	255
Тема 16 Математические модели в психологии.....	278
ПРАКТИКУМ	296
Практическое занятие № 10 Сопоставление совокупностей по уровню и однородности признака.....	296
Практическое занятие № 11 Оценка достоверности сдвига в значениях исследуемого признака.....	302
Практическое занятие № 12 Выявление различий в распределении признака	308
Практическое занятие № 13 Многофункциональные критерии	312
Практическое занятие № 14 Дисперсионный анализ.....	317
Практическое занятие № 15 Многомерный статистический анализ	325
Практическое занятие № 16 Математические модели в психологии	329
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОГРАММИРОВАННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ	333
ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ	348
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ.....	351
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	354
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	391